

## Local Area Networks — Stability Criteria

---

### Exercice 1

---

Deux types de clients arrivent à une unité de service : les clients de classe 1 [resp. de classe 2] arrivent suivant un processus de Poisson de paramètre  $\lambda_1$  [resp.  $\lambda_2$ ] et demandent un service de durée exponentielle de paramètre  $\mu_1$  [resp.  $\mu_2$ ]. Pour  $i = 1, 2$ , on note  $L_i(t)$  le nombre de clients de type  $i$  à l'instant  $t \geq 0$ . Le nombre total de serveurs vaut  $S$ , les clients qui ne trouvent pas de serveur disponible sont rejetés par le système.

1. Donner la matrice de sauts du processus de Markov  $L(t) = (L_1(t), L_2(t))$ .
2. Si  $S = +\infty$ ,
  - a) calculer la probabilité invariante de  $(L(t))$ . Le processus est-il réversible ?
  - b) Quelle est, à l'équilibre, la loi du processus des départs des clients de classe 2 ?
3. En déduire la probabilité invariante quand  $S < +\infty$ .
4. Si  $0 \leq S_2 \leq S < +\infty$ , on suppose *pour cette question* qu'un client de classe 2 qui trouve  $S_2$  clients de classe 2 dans le système est rejeté. Quel est l'intérêt d'une telle politique de service (dite de "trunk reservation") ? Exprimer la mesure invariante du processus de Markov associé.

---

### Exercice 2

---

*Processor-Sharing multiclasse.*

On considère une file d'attente de capacité infinie avec un serveur et  $c$  classes de clients. Les clients de classe  $i \in \{1, \dots, c\}$  arrivent suivant un processus de Poisson d'intensité  $\lambda_i$ , et sont servis selon une loi exponentielle de paramètre  $\mu_i$ . La discipline de service est de type "Processor-Sharing".

1. Donner la matrice de sauts du processus de Markov  $X(t) = (X_1(t), \dots, X_c(t))$ ,  $t \geq 0$ , décrivant le nombre des clients dans chacune des classes du système.
2. Écrire les équations de probabilité invariante associée à ce processus de Markov. Si  $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$  et  $\rho = \rho_1 + \dots + \rho_c$ , à quelle condition ces équations ont-elles une solution ?

---

### Exercice 3

---

On considère une file d'attente à un serveur qui sert dans l'ordre des arrivées avec le fonctionnement suivant : si un client termine son service à l'instant  $t$ , il revient dans la file d'attente avec la probabilité  $\exp(-L(t))$  si  $L(t)$  est le nombre de clients à l'instant  $t$ . Les arrivées sont Poisson de paramètre  $\lambda$  et les services exponentiels de paramètre  $\mu$ .

1. Si  $Y_n$  est le nombre de clients dans la file juste avant la fin du  $n$ -ième service effectué. Montrer que la suite  $(Y_n)$  est une chaîne de Markov irréductible.
2. À quelle condition la chaîne de Markov  $(Y_n)$  est-elle ergodique ?

---

**Exercice 4**


---

*Chaîne de Markov de renouvellement.*

On considère la matrice de transition  $(p(x, y))$  d'une chaîne de Markov sur  $\mathbb{N}$  définie par

$$\begin{cases} p(x, x-1) &= 1, & x \geq 1 \\ p(0, x) &= \mu_x, \end{cases}$$

où  $(\mu_x)$  est une probabilité sur  $\mathbb{N}$ .

- Donner la condition pour laquelle cette chaîne de Markov est ergodique.

---

**Exercice 5**


---

Des requêtes de transmission arrivent à un canal de communication suivant un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ . Si le canal est libre, la communication commence et sa durée a une distribution exponentielle de paramètre  $\mu$ . Sinon, une nouvelle demande par la requête est effectuée au bout d'une durée de distribution exponentielle de paramètre  $\delta$  et ainsi de suite jusqu'à la réussite de la transmission du message.

1. Pour  $N \geq 1$  la variable  $T_n$  est l'instant où le  $n$ -ième message a été transmis et  $Y_n$  le nombre de messages en attente dans le réseau à cet instant. Calculer la loi de  $T_{n+1} - T_n$  conditionnellement à  $\{Y_n = N\}$ .
2. Montrer que  $(Y_n)$  est une chaîne de Markov homogène, irréductible sur  $\mathbb{N}$ . Calculer  $E(Y_1 - Y_0 \mid Y_0 = N)$ .
3. Montrer que si  $\lambda < \mu$ , alors le canal est stable :  $(Y_n)$  est une chaîne de Markov ergodique. Noter que le paramètre  $\delta$  ne joue aucun rôle.
4. Si  $\lambda > \mu$ , montrer que  $(Y_n)$  est une chaîne de Markov transiente (le canal est instable).

---

**Exercice 6**


---

*Aloha avec deux sources.*

On considère un canal avec deux émetteurs 1 et 2, pour  $n \geq 1$ , l'émetteur 1 reçoit  $A_n$  nouveaux messages à la  $n$ -ième unité de temps. La suite  $(A_n)$  est supposée i.i.d. Chaque émetteur n'essaie de transmettre qu'un message à la fois, les autres étant stockés dans une file d'attente. Le protocole utilisé est Aloha avec le paramètre  $p$  (chaque unité de temps, il y a essai avec proba  $p$ ). On pose  $\lambda_1 = \mathbb{E}(A_1)$ .

On suppose pour l'instant que l'émetteur 2 a une infinité de messages à envoyer.

1. Si  $\lambda_1 < p(1-p)$ , alors montrer que le système est stable (on définira la notion associée).
2. Montrer que si  $\lambda_1 > p(1-p)$  et  $\mathbb{E}(A_1^2) < +\infty$ , alors le système est instable.

On suppose maintenant que l'émetteur 2 n'est plus saturé mais reçoit  $B_n$  nouveaux messages pendant la  $n$ -ième unité de temps. La suite  $(B_n)$  est i.i.d. et  $\lambda_2 = \mathbb{E}(B_1)$ .

3. Montrer que le système est stable si  $\lambda_1 < p(1-p)$  et  $\lambda_2 < p(1-p)$ .