

## Local Area Networks (II)

---

### Exercice 1

---

*Chaîne de Markov de renouvellement.*

On considère la matrice de transition  $(p(x, y))$  d'une chaîne de Markov sur  $\mathbb{N}$  définie par

$$\begin{cases} p(x, x-1) &= 1, & x \geq 1 \\ p(0, x) &= \mu_x, \end{cases}$$

où  $(\mu_x)$  est une probabilité sur  $\mathbb{N}$ .

- Donner la condition pour laquelle cette chaîne de Markov est ergodique.

---

### Exercice 2

---

Des requêtes de transmission arrivent à un canal de communication suivant un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ . Si le canal est libre, la communication commence et sa durée a une distribution exponentielle de paramètre  $\mu$ . Sinon, une nouvelle demande par la requête est effectuée au bout d'une durée de distribution exponentielle de paramètre  $\delta$  et ainsi de suite jusqu'à la réussite de la transmission du message.

1. Pour  $N \geq 1$  la variable  $T_n$  est l'instant où le  $n$ -ième message a été transmis et  $Y_n$  le nombre de messages en attente dans le réseau à cet instant. Calculer la loi de  $T_{n+1} - T_n$  conditionnellement à  $\{Y_n = N\}$ .
2. Montrer que  $(Y_n)$  est une chaîne de Markov homogène, irréductible sur  $\mathbb{N}$ . Calculer  $E(Y_1 - Y_0 \mid Y_0 = N)$ .
3. Montrer que si  $\lambda < \mu$ , alors le canal est stable :  $(Y_n)$  est une chaîne de Markov ergodique. Noter que le paramètre  $\delta$  ne joue aucun rôle.
4. Si  $\lambda > \mu$ , montrer que  $(Y_n)$  est une chaîne de Markov transiente (le canal est instable).

---

### Exercice 3

---

*Aloha avec deux sources.*

On considère un canal avec deux émetteurs 1 et 2, pour  $n \geq 1$ , l'émetteur 1 reçoit  $A_n$  nouveaux messages à la  $n$ -ième unité de temps. La suite  $(A_n)$  est supposée i.i.d. Chaque émetteur n'essaie de transmettre qu'un message à la fois, les autres étant stockés dans une file d'attente. Le protocole utilisé est Aloha avec le paramètre  $p$  (chaque unité de temps, il y a un essai avec proba  $p$ ). On pose  $\lambda_1 = \mathbb{E}(A_1)$ .

On suppose pour l'instant que l'émetteur 2 a une infinité de messages à envoyer.

1. Si  $\lambda_1 < p(1-p)$ , alors montrer que le système est stable (on définira la notion associée).
2. Montrer que si  $\lambda_1 > p(1-p)$  et  $\mathbb{E}(A_1^2) < +\infty$ , alors le système est instable.

On suppose maintenant que l'émetteur 2 n'est plus saturé mais reçoit  $B_n$  nouveaux messages pendant la  $n$ -ième unité de temps. La suite  $(B_n)$  est i.i.d. et  $\lambda_2 = \mathbb{E}(B_1)$ .

3. Montrer que le système est stable si  $\lambda_1 < p(1-p)$  et  $\lambda_2 < p(1-p)$ .

---

**Exercice 4**


---

*Protocole en arbre à arrivées bloquées.*

On se place dans le cadre de l'arbre binaire, pour  $n \geq 1$ , on note  $W_n$  le temps de transmission d'un message donné commençant avec  $n$  autres messages.

1. Montrer que si  $w_n = \mathbb{E}(W_n)$ , alors  $w_0 = 1$  et si  $n \geq 1$ ,

$$w_n = 1 + \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{2^n} w_k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{2^n} r_k,$$

où  $r_n = \mathbb{E}(R_n)$  et  $R_n$  est le temps total de transmission de  $n$  messages.

2. On pose pour  $x \geq 0$ ,

$$w(x) = \sum_{n \geq 0} w_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}, \quad r(x) = \sum_{n \geq 0} r_n \frac{x^n}{n!} e^{-x},$$

montrer simplement que

$$w(x) = w(x/2) + \frac{1}{2}(r(x/2) - 1) + \frac{3}{2}(1 - e^{-x}).$$


---

**Exercice 5**


---

*Protocole à arrivées bloquées.*

On considère le protocole en arbre qui fonctionne par session : la  $n + 1$ -ième session est consacrée à la transmission des messages arrivés pendant la  $n$ -ième session. On note  $L_n$  le nombre de messages en attente au début de la  $n$ -ième session si ce nombre est non nul, sinon on pose  $L_n = 1$ . Comme dans le cours  $R_p$  représente le temps qu'il faut au protocole en arbre pour transmettre  $p$  messages quand il n'y a pas d'arrivées.

Les arrivées pendant chaque unité de temps sont supposées indépendantes ayant une distribution de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

1. Montrer que  $(L_n)$  est une chaîne de Markov irréductible sur  $\mathbb{N} - \{0\}$ .  
 2. Montrer que si

$$\lambda < \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\mathbb{E}(R_n)},$$

alors la suite  $(L_n)$  est une chaîne de Markov ergodique.

---

**Exercice 6**


---

*Le protocole Ethernet saturé.*

Un message  $M$  arrive dans un réseau géré par Ethernet, on suppose qu'en raison d'une source extérieure aucun message n'est transmis. La quantité  $B(t)$  désigne la valeur du compteur de ce message à l'instant  $t$ . Le système est initialement vide et les arrivées poissonniennes, pour  $i \geq 0$  on note  $x_i(t)$  le nombre de messages (sans compter  $M$ ) ayant le compteur égal à  $i$ .

1. Montrer que pour  $t \geq 1$ ,  $x_0(t)$  et  $x_1(t)$  sont deux variables aléatoires indépendantes.  
 2. On note  $T_n$  le premier instant où le compteur de  $M$  vaut  $n$ . Montrer que  $\mathbb{E}(T_n) = 2^n - 1$ .  
 3. Si  $G_\alpha$  est une v.a. géométrique de paramètre  $\alpha$  i.e. pour  $x \geq 0$ ,  $\mathbb{P}(G_\alpha \geq x) = \alpha^x$ , montrer que, lorsque  $\alpha$  tend vers 1, la variable  $(1 - \alpha)G_\alpha$  converge en distribution vers une loi exponentielle de paramètre 1.  
 4. Montrer que la variable  $T_n/2^n$  converge en distribution. Cela suggère qu'au bout de  $n$  étapes le compteur d'une station sous Ethernet est de l'ordre de  $\log_2 n$ .