École Polytechnique
Programmes d'Approfondissement
Communication networks,
Algorithms and
Probability Theory

Petite Classe n° 8
November, 23 2011

TCP: Data Transmission in the Internet

Exercice 1

Protocole en arbre à arrivées bloquées.
On se place dans le cadre de l'arbre binaire avec des arrivées poissonniennes. Pour $n \geq 1$, on note W_n le temps de transmission d'un message donné commençant avec n autres messages.

1. Montrer que si $w_n = \mathbb{E}(W_n)$, alors $w_0 = 1$ et si $n \geq 1$,
$$w_n = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{2^n} w_k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{2^n} r_k,$$
où $r_n = \mathbb{E}(R_n)$ et R_n est le temps total de transmission de n messages.
2. On pose pour $x \geq 0$,
$$w(x) = \sum_{n \geq 0} w_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}, \qquad r(x) = \sum_{n \geq 0} r_n \frac{x^n}{n!} e^{-x},$$
montrer simplement que
$$w(x) = w(x/2) + \frac{1}{2}(r(x/2) - 1) + \frac{3}{2}\left(1 - e^{-x}\right).$$

Exercice 2

TCP avec un taux de perte fixe.
On suppose que les pertes de paquets sont indépendantes et qu'un paquet a la probabilité $1 - \theta$ d'être perdu, W_n désigne la taille de la n-ième fenêtre de congestion :
$$\mathbb{P}(W_1 = x + 1 \mid W_0 = x) = \theta^x \text{ et } \mathbb{P}(W_1 = \lfloor x/2 \rfloor \mid W_0 = x) = 1 - \theta^x, \qquad x \geq 0,$$
et $\pi = (\pi_n)$ est sa probabilité invariante sur $\mathbb{N}$.

1. Montrer que si $\beta_n = \pi_n \theta^{-n(n-1)/2}$, alors (β_n) est une suite croissante.
2. Montrer que
$$\pi_n \theta^n = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \pi_k (1 - \theta^k) \geq \pi_{2n}(1 - \theta^{2n}) + \pi_{2n+1}(1 - \theta^{2n+1}).$$
3. En déduire que
$$\beta_n \leq \pi_0 \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1 - \theta^k)},$$
et donc que $\pi_n = \beta_n \theta^{n(n-1)/2}$ où (β_n) est une suite croissante bornée.

Exercice 3

TCP sans Slow Start.
On considère une source qui envoie des paquets à travers le réseau. Chaque paquet a une probabilité $1 - \exp(-\alpha)$ d'être perdu et les pertes de paquets sont indépendantes. Les envois sont faits de la même façon que TCP à l'aide d'une variable W, la taille de la fenêtre de congestion, qui croît additivement quand il n'y a pas de perte, mais dès qu'il y a une perte la variable W est fixée à 1. On note W_n la taille de la n-ième fenêtre de congestion.

1. Montrer que (W_n) est une chaîne de Markov irréductible et ergodique sur $\mathbb{N}^*$.
2. Si $T = \inf\{n > 0 : W_n = 1\}$ donner la fonction génératrice de la probabilité invariante de (W_n) en fonction de celle de T.
3. Donner l'asymptotique du débit, $\mathbb{E}(W_\infty)$, quand α tend vers 0.

Exercice 4

Le protocole Ethernet saturé.
Un message M arrive dans un réseau géré par Ethernet, on suppose qu'en raison d'une source extérieure aucun message n'est transmis. La quantité $B(t)$ désigne la valeur du compteur de ce message à l'instant t. Le système est initialement vide et les arrivées poissonniennes, pour $i \geq 0$ on note $x_i(t)$ le nombre de messages (sans compter M) ayant le compteur égal à i.

1. Montrer que pour $t \geq 1$, $x_0(t)$ et $x_1(t)$ sont deux variables aléatoires indépendantes.
2. On note T_n le premier instant où le compteur de M vaut n. Montrer que $\mathbb{E}(T_n) = 2^n - 1$.
3. Si G_α est une variable aléatoire de distribution géométrique de paramètre $1 - \alpha$, montrer que la variable αG_α converge en distribution vers une loi exponentielle de paramètre 1.
4. Montrer que la variable $T_n/2^n$ converge en distribution.

Exercice 5

Extension continue de l'algorithme AIMD. Le processus sur $\mathbb{R}_+$ est la solution d'une équation différentielle déterministe perturbée par des sauts aléatoires. Si $X(0) = x$, jusqu'à l'instant H_x du saut, le processus est déterminé par $X(t) = y(x,t)$ où $(y(t,x))$ est la solution de l'équation différentielle $y' = F(y)$ avec $y(0) = x$ et F est une fonction > 0 sur $\mathbb{R}_+$. L'instant H_x est défini comme

$$H_x = \inf\{u \geq 0 : \int_0^u X(v)\, dv = E_1\}$$

où E_1 est une variable exponentielle. À l'instant $t = H_x$, le processus saute en $X(t) = \delta X(t-)$.

1. Si $F(u) \equiv 1$, à quoi correspond le processus $(X(t))$ associé ?
2. Calculer la loi de H_x.
3. Si f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ bornée ainsi que sa dérivée, calculer la limite suivante

$$\Omega(f)(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}\left(f(X(h)) - f(x) \mid X(0) = x \right).$$