

Introduction à la méthode des Éléments Finis

PSL Week à l'École des Mines Paristech, Novembre 2024

Nicole SPILLANE*

Ces notes ont été écrites pour le cours d'*Éléments Finis* dispensé à l'école des Mines Paristech en novembre 2024 dans le cadre de la semaine PSL. Elles sont fortement inspirées des polycopiés suivants : [1, 2, 5].

Table des matières

1	Introduction sur un exemple	2
1.1	Domaine	2
1.2	Problème (dans sa forme dite <i>forte</i>)	2
1.3	Opérateurs Différentiels et Formules de GREEN	3
1.4	Problème (dans sa forme dite <i>faible</i> ou <i>variationnelle</i>)	4
1.5	Élément fini \mathbb{P}_1	7
1.6	Formulation variationnelle approchée	10
1.7	Mise sous forme matricielle	10
2	Formulation variationnelle : cadre abstrait	14
2.1	Théorie de LAX-MILGRAM	14
2.2	Retour sur l'exemple de la section 1	17
2.3	Théorie de SOBOLEV	19
2.4	Retour plus fructueux sur l'exemple de la section 1	24
2.5	Approximation interne (ou approximation de GALERKIN)	26
3	Méthode des éléments finis de LAGRANGE : cadre abstrait	29
3.1	Définitions	29
3.2	Élément fini de LAGRANGE \mathbb{P}_1 sur un maillage triangulaire en deux dimensions	30
3.3	Éléments finis de LAGRANGE d'ordre plus élevés sur des triangles	30
3.4	Éléments finis de LAGRANGE dans \mathbb{R}^3	30
3.5	Assemblage de la matrice	32
3.6	Éléments de preuve pour la convergence des éléments finis \mathbb{P}_k	32

*CNRS, CMAP, École Polytechnique. Contact: nicole.spillane@cmap.polytechnique.fr

1 Introduction sur un exemple

Dans cette première partie du cours on introduit un cas particulier d'équation aux dérivées partielles, l'équation de réaction diffusion, sur laquelle on illustrera la méthode des éléments finis.

1.1 Domaine

On se place en dimension $d = 2$ d'espace. Soit Ω un polygone de \mathbb{R}^2 . On note Γ le bord de Ω et on suppose qu'il est divisé en deux parties disjointes Γ_D et Γ_N (comme illustré dans la figure 1) :

$$\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N.$$

Nous allons résoudre une équation aux dérivées partielles posée dans Ω avec des

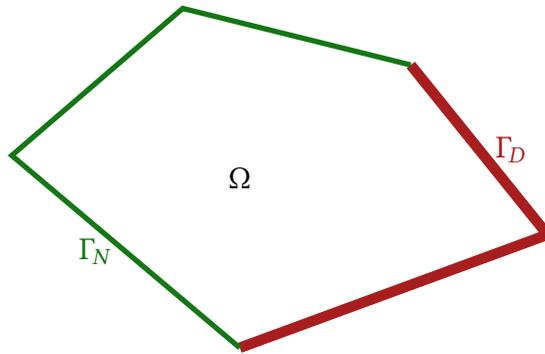


FIGURE 1 – Le bord Γ de Ω est divisé en Γ_D et Γ_N sur lesquelles on imposera des conditions aux limites de deux types différents.

conditions aux limites sur Γ . Ces conditions aux limites seront de deux types : NEUMANN sur Γ_N et DIRICHLET sur Γ_D (ces notions seront précisées dans le prochain paragraphe).

1.2 Problème (dans sa forme dite forte)

Le problème que nous résolvons est l'équation de réaction-diffusion : trouver une fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$ (sous-entendu à valeurs dans \mathbb{R}) qui vérifie

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + cu(x) = f(x), & \forall x \in \Omega, \\ u(x) = g_0(x), & \forall x \in \Gamma_D, \\ \partial_n u(x) = g_1(x), & \forall x \in \Gamma_N \text{ tel que } \partial_n u(x) \text{ est défini.} \end{cases} \quad (1)$$

Nous avons introduit les paramètres suivants :

- $c \geq 0$ est une constante,

- $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction que l'on suppose continue et appelée le terme source de l'équation,
- $g_0, g_1 : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions qui donnent respectivement la valeur imposée à u sur Γ_D (condition de DIRICHLET) et la valeur imposée à la dérivée normale $\partial_n u$ sur Γ_N (condition de NEUMANN). On suppose que la fonction g_1 est de classe C^1 .

Le prochain paragraphe définit, entre autres, les opérateurs différentiels qui interviennent dans l'équation ainsi que des résultats importants qui nous permettront de réécrire le problème sous sa forme dite *variationnelle*.

1.3 Opérateurs Différentiels et Formules de GREEN

Les formules de GREEN peuvent être vues comme une généralisation de la formule d'intégration par parties aux fonctions définies sur des ouverts de \mathbb{R}^d pour $d = 1, 2$ ou 3 . On considère un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et on note Γ le bord de Ω . On suppose que Ω est régulier. Plus précisément, on suppose que Ω est polygonal (quand $d = 2$), polyédral (quand $d = 3$) ou de classe C^1 mais il n'est pas nécessaire de connaître la définition d'un tel ouvert dans le cadre de ce cours. On définit en presque tout point x de $\partial\Omega$ le vecteur unitaire sortant, noté $\mathbf{n}(x)$, qui est orthogonal au plan tangent à $\partial\Omega$ en ce point. Enfin on note dx la mesure de LEBESGUE dans Ω et $dy(x)$ la mesure de surface ou mesure de LEBESGUE de dimension $d - 1$ sur $\partial\Omega$.

Soit $\mathbf{q} \in C^1(\overline{\Omega})^d$ un champ de vecteur et $v \in C^1(\overline{\Omega})$ un champ de scalaire. On rappelle (dans l'ordre) les définitions des opérateurs divergence, gradient et laplacien :

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial q_i}{\partial x_i}, \quad \nabla v = \begin{pmatrix} \partial v / \partial x_1 \\ \vdots \\ \partial v / \partial x_d \end{pmatrix} \text{ et } \Delta(v) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}. \quad (2)$$

On rappelle aussi la définition de la dérivée normale $\partial_n w$ de $w \in C^1(\overline{\Omega})$. Elle est définie en tout les points de Γ auxquels une normale $\mathbf{n}(x)$ est définie par la formule :

$$\partial_n w(x) = \nabla w(x) \cdot \mathbf{n}(x). \quad (3)$$

Pour les ouverts Ω considérés, on a donc que $\partial_n w$ est définie en presque tout point de Γ (on doit exclure les éventuels coins de Ω).

Théorème 1.1 [Formule de la divergence ou formule de GAUSS ou formule d'OSTROGRADSKI] – Soit $\mathbf{q} \in C^1(\overline{\Omega})^d$ un champ de vecteur défini sur Ω . On a la formule

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{q}(x)) \, dx = \int_{\Gamma} \mathbf{q}(x) \cdot \mathbf{n}(x) \, dy(x).$$

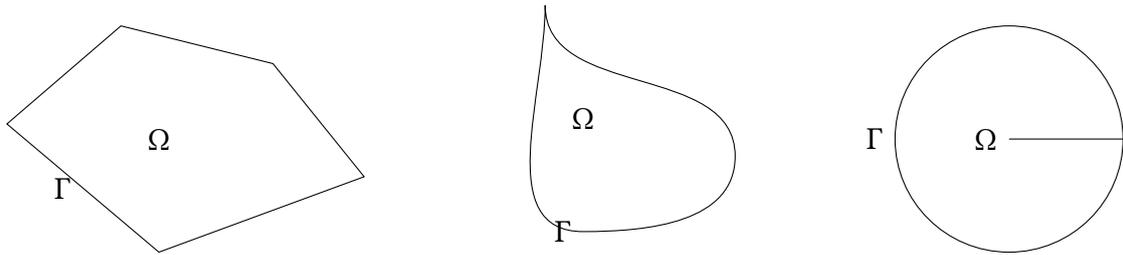


FIGURE 2 – Gauche : Ω est polygonal. Centre : Ω n'est pas de classe C^1 à cause du point de rebroussement (la frontière n'est pas suffisamment régulière). Droite : Ω n'est pas de classe C^1 à cause de la fissure (le domaine n'est pas d'un seul côté de la frontière).

On admet la formule de la divergence. On démontre facilement les deux corollaires suivants qui sont très utiles pour la mise sous forme variationnelle des équations aux dérivées partielles qui est l'une des étapes clés de la méthode des éléments finis.

Corollaire 1.2 [Formule de GREEN] – Soit $\mathbf{q} \in C^1(\overline{\Omega})^d$ et $v \in C^1(\overline{\Omega})$, on a

$$\int_{\Omega} v(x) \operatorname{div}(\mathbf{q}(x)) \, dx = - \int_{\Omega} \mathbf{q}(x) \cdot \nabla v(x) \, dx + \int_{\Gamma} v(x) (\mathbf{q}(x) \cdot \mathbf{n}(x)) \, d\gamma(x).$$

DÉMONSTRATION – On combine la formule de la divergence appliquée à $v\mathbf{q}$ avec la formule d'analyse vectorielle : $\operatorname{div}(v\mathbf{q}) = v \operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \nabla v$. \square

La formule suivante est probablement la formule de GREEN qui nous sera la plus utile puisqu'on l'utilise dans l'établissement de la formulation variationnelle du problème de réaction diffusion.

Corollaire 1.3 [Formule de GREEN] – Soit $v \in C^1(\overline{\Omega})$ et $w \in C^2(\overline{\Omega})$, on a

$$\int_{\Omega} v(x) \Delta w(x) \, dx = - \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla w(x) \, dx + \int_{\Gamma} v(x) \partial_n w(x) \, d\gamma(x).$$

DÉMONSTRATION – On applique la formule de GREEN précédente au champ de vecteur $\mathbf{q} = \nabla v \in C^1(\overline{\Omega})^d$ et on utilise la formule d'analyse vectorielle : $\Delta w = \operatorname{div}(\nabla w)$. \square

1.4 Problème (dans sa forme dite *faible* ou *variationnelle*)

Pour alléger les notations on simplifiera l'écriture des intégrales en notant par exemple $\int_{\Omega} w = \int_{\Omega} w(x) \, dx$ et $\int_{\Gamma} w = \int_{\Gamma} w(x) \, d\gamma(x)$.

Si on applique la formule de GREEN du corollaire 1.3 à une fonction $v \in C^1(\overline{\Omega})$ et à la solution $u \in C^2(\overline{\Omega})$ de l'équation (1) on trouve

$$\int_{\Omega} \Delta u v + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Gamma} \partial_n u v = \int_{\Gamma_N} \partial_n u v + \int_{\Gamma_D} \partial_n u v.$$

On a écrit l'intégrale sur le bord Γ de Ω comme une somme d'intégrales sur Γ_D et Γ_N afin d'injecter dans l'équation la condition aux limites de type NEUMANN ($\partial_n u = g_1$ sur Γ_N). On remplace aussi Δu par son expression donnée par l'équation différentielle pour obtenir

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + c \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g_1 v + \int_{\Gamma_D} \partial_n u v.$$

On ne connaît pas la valeur de $\partial_n u$ sur Γ_D . Afin d'annuler le dernier terme de l'équation, on va se restreindre à des fonctions v qui sont nulles sur Γ_D . Si u est solution de l'équation de départ, on a donc que u est aussi solution du problème suivant :

Trouver $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tel que

$$\begin{cases} u = g_0, \text{ sur } \Gamma_D, \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + c \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g_1 v, \forall v \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \Gamma_D. \end{cases} \quad (4)$$

Cette équation est appelée **formulation variationnelle** ou **formulation faible**. On remarque que le terme de gauche comporte tous les termes qui dépendent de la solution u , il peut s'écrire comme une forme bilinéaire évaluée en u et en v . Le terme de droite de l'équation quant à lui dépend des paramètres du problème, il peut s'écrire comme une forme linéaire en v . Ceci apparaîtra clairement dans le cadre abstrait que nous introduirons dans la partie 2 de ce cours.

Remarque 1.4 [Conditions aux limites naturelles et essentielles] — Les conditions aux limites de NEUMANN et DIRICHLET ne jouent pas le même rôle dans la formulation du problème :

- Les conditions aux limites de type DIRICHLET (valeur de u imposée sur le bord) sont appelées **essentielles** : elles ne sont pas incorporées dans la formulation variationnelle puisqu'elles apparaissent comme une équation séparée. Leur version homogène est imposée aux fonctions v par lesquelles on a multiplié l'équation (les fonctions tests).
- Les conditions aux limites de type NEUMANN (valeur de $\partial_n u$ imposée sur le bord) sont appelées **naturelles** : elles sont incorporées dans la formulation variationnelle.

Attention : le fait de qualifier ainsi une condition aux limites ne dépend pas de si c'est une condition de NEUMANN ou de DIRICHLET mais du rôle qu'elle joue dans la formulation variationnelle.

Les fonctions v dans la formulation variationnelle sont appelées des **fonctions tests**. On teste l'équation de départ contre ces fonctions par multiplication puis intégration. Ceci revient à évaluer des versions moyennées de l'équation où la moyenne est calculée avec les poids données par v . Les fonctions v ne sont pas des inconnues du problème : l'équation doit être satisfaite pour toutes les fonctions tests. On a le résultat d'équivalence suivant.

Théorème 1.5 [Equivalence entre les formes faibles et fortes du problème] — Soit $u \in C^2(\overline{\Omega})$ on a l'équivalence suivante

$$u \text{ est solution de (1)} \Leftrightarrow u \text{ est solution de (4)}.$$

Pour montrer que la solution faible est aussi une solution forte on utilisera le résultat suivant qui est un résultat fondamental de la théorie de l'intégration.

Lemme 1.6 — Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . Soit w une fonction continue dans Ω . On a l'implication suivante

$$\left(\int_{\Omega} w(x)\varphi(x) dx = 0, \forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega) \right) \Rightarrow (w(x) = 0 \forall x \in \Omega).$$

L'ensemble $C_C^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivable et dont le support est un compact inclus dans l'ouvert Ω .

On rappelle que le support d'une fonction est la fermeture de l'ensemble des points en lesquels la fonction ne s'annule pas. C'est par définition un ensemble fermé. Par définition, les fonctions de $C_C^\infty(\Omega)$ pour Ω ouvert s'annulent donc sur le bord de Ω .

DÉMONSTRATION — du Théorème. On a déjà démontré le sens direct puisqu'on a établi la formulation faible par implication à partir de la formulation forte. Réciproquement, si on suppose que u est solution de (4), en appliquant le théorème de GREEN (corollaire 1.3) on obtient

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + cu - f) v + \int_{\Gamma_N} (\partial_n u - g_1) v = 0, \forall v \in C^1(\overline{\Omega}); v = 0 \text{ sur } \Gamma_D. \quad (5)$$

Si on regarde le cas particulier des fonctions tests dans $C_C^\infty(\Omega)$ on trouve que

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + cu - f) v = 0, \forall v \in C_C^\infty(\Omega).$$

Le lemme 1.4 s'applique à la fonction continue $-\Delta u + cu - f$ et on obtient qu'elle est identiquement nulle. La partie différentielle de l'équation de départ est donc satisfaite. La condition de Dirichlet $u = 0$ sur Γ_D apparait explicitement dans la formulation faible. Il nous reste à retrouver la condition de Neumann : $\partial_n u = g_1$ sur Γ_N .

Pour cela on injecte $-\Delta u + cu - f = 0$ dans (5). Il reste :

$$\int_{\Gamma_N} (\partial_n u - g_1) v = 0, \forall v \in C^1(\overline{\Omega}); v = 0 \text{ sur } \Gamma_D,$$

et une autre application du lemme 1.4 permet de conclure que $\partial_n u = g_1$ sur Γ_N ce qui conclut la preuve. \square

Dans la suite nous allons procéder à la discrétisation de notre équation. Nous allons utiliser la forme faible de l'équation (qui est équivalente à la forme forte). Remarquons que nous n'avons pas démontré de résultat d'existence ou d'unicité pour la solution à notre problème. Une dernière remarque est que l'on pourrait affaiblir la formulation faible du problème en supposant seulement que u est de classe C^1 et non C^2 . On verra dans la partie 2 (et plus précisément au paragraphe 2.4) que pour arriver à un résultat d'existence et d'unicité il faut encore élargir l'espace dans lequel on cherche la solution faible. La contrepartie est qu'il faut alors travailler plus pour montrer que la solution faible est bien une reformulation (dans un sens à préciser) de l'équation de départ.

1.5 Élément fini \mathbb{P}_1

On va discrétiser le domaine Ω puis introduire un espace d'éléments finis appelé élément fini de Lagrange linéaire ou \mathbb{P}_1 . On approche ensuite la solution de notre équation en la cherchant dans un espace d'approximation de dimension finie.

Définition 1.7 [maillage, triangulation] – Une triangulation d'un ouvert polygonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ensemble fini \mathcal{T}_h de triangles (non dégénérés) $(K_i)_{1 \leq i \leq \#(\mathcal{T}_h)}$ vérifiant

- $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1, \dots, \#(\mathcal{T}_h)} K_i$,
 - si $i \neq j$ alors $K_i \cap K_j = \begin{cases} \emptyset, \\ \text{ou un sommet commun,} \\ \text{ou un arrête commune.} \end{cases}$
-

La figure 3 illustre cette définition en montrant notamment deux situations qui ne constituent pas des triangulations.

Définition 1.8 [espace des fonctions linéaires sur un triangle K] – Soit K un triangle non dégénéré. Une fonction $p : \begin{matrix} K \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto p(x_1, x_2) \end{matrix}$ est linéaire si elle est de la forme

$$p(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, \text{ pour des coefficients } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

On note $\mathbb{P}_1(K)$ l'ensemble des fonctions linéaires sur K .

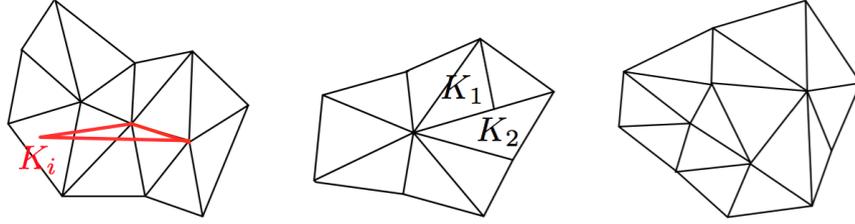


FIGURE 3 – Seule la configuration de droite correspond à une triangulation.

Proposition 1.9 – Une fonction $p \in \mathbb{P}_1(K)$ est définie de manière unique par sa valeur aux sommets S_1, S_2 et S_3 de K .

DÉMONSTRATION – Soit $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$, pour $1 \leq i \leq 3$, les coordonnées dans \mathbb{R}^2 de chacun des sommets de K . On cherche $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_1^{(1)} + a_2 x_2^{(1)} &= p(S_1), \\ a_0 + a_1 x_1^{(2)} + a_2 x_2^{(2)} &= p(S_2), \\ \text{et } a_0 + a_1 x_1^{(3)} + a_2 x_2^{(3)} &= p(S_3). \end{aligned}$$

La solution existe et est unique si et seulement si le déterminant suivant est non nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ 1 & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

La valeur du déterminant est le double de l'aire du triangle K . On a supposé que K est non dégénéré donc d'aire non nulle. Par conséquent, la condition est satisfaite ce qui termine la preuve. \square

Définition 1.10 – On dit que les valeurs prises par les fonctions $p \in \mathbb{P}_1(K)$ aux sommets du triangle K sont les degrés de liberté de l'espace $\mathbb{P}_1(K)$.

Partant de l'élément fini $\mathbb{P}_1(K)$ sur chaque élément du maillage, on construit un espace d'approximation dans lequel on cherchera une solution approchée à notre équation.

Définition 1.11 – On définit l'espace d'approximation suivant

$$V_h = \{v_h \in C^0(\Omega); v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \text{ pour tout } K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Il est évident que V_h est un sous espace vectoriel de $C^0(\Omega)$.

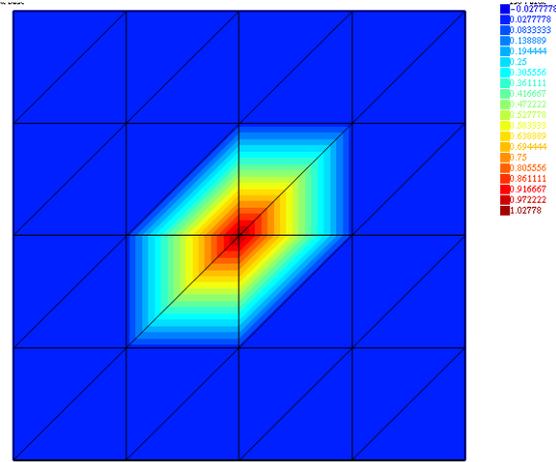


FIGURE 4 – Fonction de base Φ_i pour un élément fini \mathbb{P}_1 (Φ_i linéaire sur chaque triangle, $\Phi_i(S_i) = 1$ et $\Phi_i(S_j) = 0$ pour $i \neq j$)

Il apparaît que V_h est un espace vectoriel de dimension finie, et que les éléments de V_h sont définis de façon unique par leurs valeurs aux sommets de la triangulation \mathcal{T}_h . On appelle ces sommets les degrés de liberté de l'espace d'approximation V_h . Afin de formaliser cela on introduit une base de V_h qui nous sera très utile par la suite.

Proposition 1.12 [base de V_h] – Soient $(S_i)_{1 \leq i \leq n}$ l'ensemble des sommets de la triangulation \mathcal{T}_h . On définit Φ_i ($1 \leq i \leq n$) comme étant l'unique élément de V_h tel que

$$\Phi_i(S_i) = 1 \text{ et } \Phi_i(S_j) = 0 \text{ pour tout } j \neq i.$$

La famille de fonctions $(\Phi_i)_{1 \leq i \leq n}$ forme une base de V_h . En particulier, pour tout $u_h \in V_h$, on a que $u_h = \sum_{i=1}^n u_h(S_i) \Phi_i$.

DÉMONSTRATION – On doit montrer que la famille constituée des Φ_i est à la fois libre et génératrice.

Supposons d'abord que $\sum_{i=1}^n \mu_i \Phi_i = 0$ pour un certain choix de coefficients $\mu_i \in \mathbb{R}$. Ceci est vrai en particulier en chaque sommet S_j de la triangulation. Par conséquent : $\sum_{i=1}^n \mu_i \Phi_i(S_j) = 0$ et le seul terme non nul de cette somme est le terme en j qui s'écrit $\mu_j \times 1 = 0$. Finalement tous les coefficients μ_j sont nuls et la famille $(\Phi_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.

Soit $u_h \in V_h$. Les fonctions u_h et $\sum_{i=1}^n u_h(S_i) \Phi_i$ sont toutes deux linéaires sur chacun des triangles K de \mathcal{T}_h et partagent les mêmes valeurs aux sommets. Elles sont donc égales sur chacun des triangles d'après la proposition 1.5, et donc sur $\overline{\Omega}$ en entier. \square

On montre une représentation graphique d'une des fonctions de base Φ_i dans la figure 4.

Afin de prendre en compte la condition aux limites de DIRICHLET, on va séparer les sommets de la triangulation \mathcal{T}_h en deux sous espaces complémentaires de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket; \text{ tels que } S_i \in \Gamma_D\}, \\ \mathcal{L} &= \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket; \text{ tels que } S_i \notin \Gamma_D\}.\end{aligned}$$

Définition 1.13 – Soit $V_h^{\Gamma_D} = \{v_h \in V_h; v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$. C'est un sous espace vectoriel de dimension $\#(\mathcal{L})$ de V_h dont une base est $(\Phi_i)_{i \in \mathcal{L}}$.

1.6 Formulation variationnelle approchée

Le problème variationnel approché s'écrit :
Trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$\begin{cases} u_h(S_i) = g_0(S_i), \forall i \in \mathcal{D}, \\ \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h + c \int_{\Omega} u_h v_h = \int_{\Omega} f v_h + \int_{\Gamma_N} g_1 v_h, \forall v \in V_h^{\Gamma_D}. \end{cases}$$

En écrivant le problème variationnel approché nous avons effectué les trois modifications suivantes.

- On cherche désormais la solution dans un sous-espace V_h de dimension finie (donc on a un nombre fini d'inconnues n , qu'on réduit encore en imposant la condition aux limites).
- On a écrit la condition aux limites de DIRICHLET en imposant la valeur de u_h à certains nœuds de \mathcal{T}_h . En faisant cela on n'impose pas exactement la condition $u|_{\Gamma_D} = g_0$ mais on l'impose aux nœuds de la triangulation qui sont sur Γ_D . Le problème a désormais un nombre d'inconnues égal à $\#(\mathcal{L})$.
- L'espace des fonctions tests est $V_h^{\Gamma_D}$ et il a la même dimension que le nombre d'inconnues du problème (ce qui nous mènera plus tard à un système linéaire avec une matrice carrée).

1.7 Mise sous forme matricielle

Par linéarité de la deuxième équation dans la forme variationnelle discrète, il est nécessaire et suffisant de vérifier l'équation pour $v_h \in \{\Phi_j; j \in \mathcal{L}\}$, c'est-à-dire pour chacune des fonctions de base de l'espace des fonctions tests. Donc le problème variationnel discret est équivalent à :

Trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$\begin{cases} u_h(S_i) = g_0(S_i), \forall i \in \mathcal{D}, \\ \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \Phi_j + c \int_{\Omega} u_h \Phi_j = \int_{\Omega} f \Phi_j + \int_{\Gamma_N} g_1 \Phi_j, \forall j \in \mathcal{L}. \end{cases}$$

On peut aussi décomposer la fonction u_h sur la base de V_h :

$$\begin{aligned} u_h &= \sum_{i=1}^n u_h^i \Phi_i \quad \text{où} \quad u_h^i = u_h(S_i) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{L}} u_h^i \Phi_i + \sum_{i \in \mathcal{D}} g_0(S_i) \Phi_i. \end{aligned}$$

Par linéarité du gradient on a aussi

$$\nabla u_h = \sum_{i \in \mathcal{L}} u_h^i \nabla \Phi_i + \sum_{i \in \mathcal{D}} g_0(S_i) \nabla \Phi_i.$$

En injectant ces expressions dans la formulation variationnelle discrète, et en utilisant la linéarité de la deuxième équation par rapport à u_h on trouve le système d'équations suivants :

Trouver $\mathbf{u}_h = \begin{pmatrix} u_h^1 \\ \vdots \\ u_h^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tel que $u_h^i = g_0(S_i)$ pour tout $i \in \mathcal{D}$ et

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{L}} u_h^i \left(\int_{\Omega} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j + c \int_{\Omega} \Phi_i \Phi_j \right) = \\ \int_{\Omega} f \Phi_j + \int_{\Gamma_N} g_1 \Phi_j - \sum_{i \in \mathcal{D}} g_0(S_i) \left(\int_{\Omega} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j + c \int_{\Omega} \Phi_i \Phi_j \right), \quad \forall j \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Remarque 1.14 – Il s'agit d'un système linéaire à $\#(\mathcal{L})$ équations et $\#(\mathcal{L})$ inconnues. Les inconnues sont les coordonnées de la fonction linéaire par morceaux u_h dans la base $(\Phi_i)_{1 \leq i \leq n}$ en enlevant les degrés de liberté dans \mathcal{D} qui sont fixés par la condition de DIRICHLET. Seuls les termes contenant des inconnues de problème sont dans le terme de gauche de l'équation.

Comme tout système linéaire dans \mathbb{R}^n , notre problème peut s'écrire sous forme matricielle. Pour cela on introduit les notations suivantes, soient

$\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ définie par $K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j$, et appelée la matrice de rigidité,

$\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ définie par $M_{ij} = \int_{\Omega} \Phi_i \Phi_j$, et appelée la matrice de masse,

$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ tel que $b_i = \int_{\Omega} f \Phi_i + \int_{\Gamma_N} g_1 \Phi_i$; $i \in \mathcal{L}$.

$\mathbf{A} = \mathbf{K} + c\mathbf{M}$ et appelée la matrice du problème.

On n'a défini que les coefficients de \mathbf{b} qui correspondent à des degrés de liberté de la solution (en excluant donc les points fixés par la condition de DIRICHLET). On peut mettre les autres à zéro mais cela n'a pas d'importance car leur valeur n'apparaîtra pas dans la formulation matricielle du problème. On montre facilement que

- la matrice \mathbf{K} est symétrique et positive (son noyau est l'ensemble des vecteurs engendrés par $(1, 1, \dots, 1)^\top$),
- la matrice \mathbf{M} est symétrique et définie positive,
- la matrice \mathbf{A} est symétrique et positive. Si, de plus, on a $c > 0$ alors elle est même définie positive.

Remarque 1.15 [calcul des b_i] — Il n'est pas clair que les intégrales qui entrent en jeu dans le calcul des coefficients de \mathbf{b} , qui font intervenir les données du problème, peuvent être calculées analytiquement. En pratique on utilisera souvent des formules de quadrature pour les approcher. Il est assez naturel de les calculer de façon approchée puisqu'on est déjà en train de résoudre une version approchée du problème. Il faut alors faire en sorte que l'erreur commise en effectuant la quadrature est du même ordre de grandeur que (ou inférieure à) l'erreur commise en remplaçant le problème par sa solution approchée.

Le système linéaire peut maintenant être réécrit ainsi

$$\sum_{i \in \mathcal{L}} A_{ij} u_h^i = b_j - \sum_{i \in \mathcal{D}} A_{ij} g_0(S_i), \forall j \in \mathcal{L}.$$

On doit à présent distinguer deux cas.

- Si aucune condition de DIRICHLET n'est imposée ($\mathcal{D} = \emptyset$) alors $\mathcal{L} = \llbracket 1, n \rrbracket$ et on résout le problème

$$\text{trouver } \mathbf{u}_h \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \mathbf{A} \mathbf{u}_h = \mathbf{b},$$

la solution continue étant $u_h = \sum_{i=1}^n u_h^i \Phi_i$.

- Si une condition de DIRICHLET est imposée alors on résout le problème

$$\text{trouver } \mathbf{u}_h \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \mathbf{A}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}} \mathbf{u}_h^{\mathcal{L}} = \mathbf{b}_{\mathcal{L}} - \mathbf{A}_{\mathcal{L}, \mathcal{D}} \mathbf{u}_h^{\mathcal{D}},$$

où $\mathbf{u}_h^{\mathcal{D}}$ contient les valeurs $g_0(S_i)$, $i \in \mathcal{D}$.

la solution continue étant $u_h = \sum_{i \in \mathcal{L}} u_h^i \Phi_i + \sum_{i \in \mathcal{D}} g_0(S_i) \Phi_i$.

On a noté $\mathbf{A}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}}$ la sous matrice de \mathbf{A} construite en extrayant les lignes et les colonnes dont les numéros sont dans \mathcal{L} et $\mathbf{A}_{\mathcal{L}, \mathcal{D}}$ la sous matrice de \mathbf{A} construite en extrayant les lignes dont les numéros sont dans \mathcal{L} et les colonnes dont les numéros sont dans \mathcal{D} . De même, on sépare \mathbf{u}_h en deux sous vecteurs $\mathbf{u}_h^{\mathcal{D}}$ et $\mathbf{u}_h^{\mathcal{L}}$.

Remarque 1.16 — *Le problème admet une unique solution sauf dans le cas où $c = 0$ et $\Gamma_D = \emptyset$. La matrice A n'est alors pas inversible (elle a pour noyau l'espace des vecteurs constants).*

Deux remarques fondamentales sont que les matrices K , M et donc A sont creuses et qu'elles peuvent être assemblées en calculant des *contributions élémentaires*. En effet :

- si $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Les fonctions de base Φ_i et Φ_j ont pour support l'ensemble des triangles K pour lesquels S_i , respectivement S_j est un sommet. Donc si S_i et S_j ne sont pas connectés par une arête du maillage on a que $A_{ij} = M_{ij} = K_{ij} = 0$.
- on a par exemple $\int_{\Omega} \nabla \Phi_i \nabla \Phi_j = \sum_K \int_K \Phi_i \Phi_j$ et d'après la remarque précédente la plupart des termes dans la somme vont être nuls. Une méthode naturelle (mais pas la seule) pour assembler les matrices de masse et de rigidité est de procéder élément par élément.

L'assemblage de la matrice et la résolution du système linéaire creux qui en résulte sont le sujet de deux cours assurés par Vladislav YASTREBOV et Christophe BOVET.

Remarque 1.17 — *Nous avons présenté une manière d'imposer les conditions aux limites de type DIRICHLET non homogène. Il y a beaucoup d'autres manières de le faire en pratique, notamment par pénalisation comme dans le logiciel Freefem++ utilisé pour les projets. Ceci nous laisse entrevoir une subtilité d'implémentation de la méthode des éléments finis qui est la numérotation des variables (en effet, dans la matrice $A_{\mathcal{T}, \mathcal{L}}$ les numéros de ligne ou de colonne ne renvoient plus aux mêmes variables que dans la matrice complète A et il faut donc stocker la correspondance entre les deux systèmes de numérotation).*

Dans cette partie du cours nous sommes parti.e.s d'une équation aux dérivées partielles et nous sommes arrivé.e.s à une approximation de cette équation écrite sous la forme d'un système linéaire. L'avantage est que l'on dispose d'outils numériques pour résoudre les systèmes linéaires. Il reste cependant beaucoup de points à éclaircir : le problème de départ a-t-il une solution ? Si oui est-elle unique ? Le problème que nous avons appelé *approché* donne-t-il réellement une approximation de la solution à notre équation différentielle ? Comment peut-on évaluer l'erreur que l'on commet ?

Dans la figure 5 nous représentons la solution approchée du problème calculée avec les paramètres donnés en légende. Le code est le suivant :

```
mesh Th=square(30,30);
fespace Vh(Th,P1);
Vh u,v;
real c = 1;
solve Poisson(u,v) = int2d(Th)(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v)) +
int2d(Th)(c*u*v) + int2d(Th)(y*v) + int1d(Th,2)(v)
+ int1d(Th,4)(v) + on(1,u=x^4)+on(3,u=-1.*x^4);
plot(u);
```

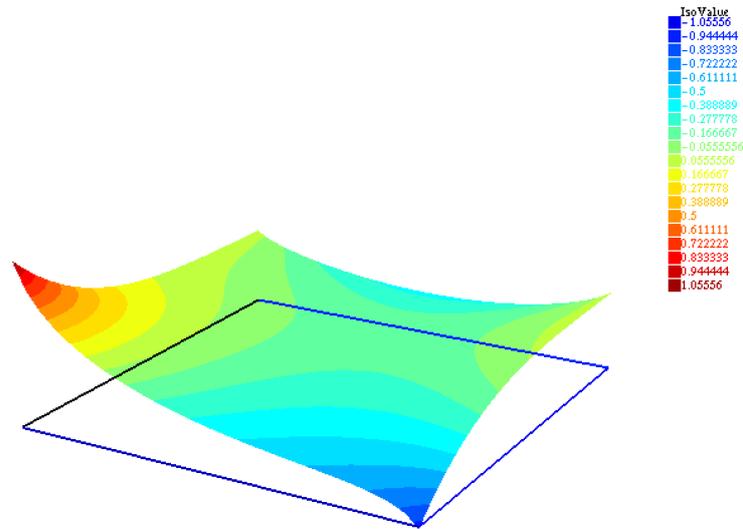


FIGURE 5 – Solution du problème calculée avec Freefem++ pour les paramètres suivants : Ω est le carré unité maillé avec 180 triangles, éléments finis \mathbb{P}_1 , $c = 1$, $f = x_2$, $\partial_n u = 1$ sur deux arrêtes opposées, $u = x_1^4$ sur une des arrêtes restantes et $u = -x_1^4$ sur la dernière arrête. On a noté x_1 et x_2 les coordonnées d'un point $x \in \mathbb{R}^2$.

2 Formulation variationnelle : cadre abstrait

Dans cette partie du cours, on écrit la méthode des éléments finis dans un cadre général. Nous commençons par un résultat d'existence et d'unicité qui va nous donner un cadre théorique dans lequel écrire notre problème sous forme abstraite. Puis nous introduirons des éléments d'analyse fonctionnelle qui permettent d'utiliser ce cadre pour écrire des problèmes du type de celui de la première partie. Nous formaliserons ensuite le concept d'approximation interne en présentant quelques outils d'analyse de l'erreur et nous terminerons par une présentation formelle des espaces d'éléments finis de LAGRANGE.

2.1 Théorie de LAX-MILGRAM

Le cadre abstrait n'est pas celui de la formulation forte de l'équation aux dérivées partielles mais celui de la formulation variationnelle. La raison est que l'on choisit de se placer dans le cadre d'application du théorème de LAX-MILGRAM. Ce théorème, dont l'énoncé suit, garantit l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel sous certaines hypothèses.

Théorème 2.1 [Théorème de LAX-MILGRAM] — Soit V un espace de HILBERT.

Supposons que :

– $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue sur V :

$$\exists C > 0 \text{ tel que } |L(v)| \leq C\|v\|, \forall v \in V.$$

– $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur $V \times V$:

$$\exists M > 0 \text{ tel que } |a(w, v)| \leq M\|w\|\|v\|, \forall w, v \in V \text{ (continuité).}$$

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2, \forall v \in V \text{ (coercivité).}$$

Alors, il existe une unique solution au problème :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v), \forall v \in V. \quad (\text{FV})$$

De plus cette solution dépend continûment de la forme linéaire L :

$$\|u\| \leq \frac{C}{\alpha} = \frac{\|L\|_{V'}}{\alpha}.$$

DÉMONSTRATION — On commence par le dernier résultat de dépendance continue de la solution par rapport à la donnée L . En prenant $v = u$ dans la formulation variationnelle et en appliquant la relation de coercivité on trouve :

$$\alpha\|u\|^2 \leq a(u, u) = L(u) \leq C\|u\|, \quad (6)$$

ce qui donne bien le résultat en simplifiant par $\|u\|$ si $\|u\| \neq 0$ et directement sinon. On remarque qu'on a utilisé dans le théorème la notation $\|L\|_{V'}$ pour la norme de l'application linéaire L dans le dual de V (qui peut être identifié avec V à travers le théorème de représentation de RIESZ comme on va le faire ci-dessous).

Le reste de cette preuve est une recopie de [2][Théorème 2.10].

Pour tout $w \in V$, l'application $v \mapsto a(w, v)$ est une forme linéaire continue sur V . Le théorème de représentation de RIESZ entraîne qu'il existe un élément de V , noté $A(w)$ tel que

$$a(w, v) = (A(w), v), \text{ pour tout } v \in V.$$

Par ailleurs, la bilinéarité de a implique la linéarité de l'application $w \mapsto A(w)$. De plus, en prenant $v = A(w)$, la continuité de a montre que

$$\|A(w)\|^2 = a(w, A(w)) \leq M\|w\| \|A(w)\|,$$

c'est-à-dire que $\|A(w)\| \leq M\|w\|$: l'application $w \mapsto A(w)$ est continue. Une autre application du théorème de représentation de RIESZ implique qu'il existe un élément de V , noté f , tel que

$$\|f\| = \|L\|_{V'}, \text{ et } L(v) = (f, v) \text{ pour tout } v \in V.$$

Finalement, le problème variationnel (FV) est équivalent à :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } A(u) = f.$$

Montrons à présent que A est bijectif de V dans V ce qui assure l'existence et l'unicité de la solution. Par coercivité de a il vient que

$$\alpha \|w\|^2 \leq (A(w), w) \leq \|A(w)\| \|w\|,$$

ce qui donne

$$\alpha \|w\| \leq \|A(w)\|, \text{ pour tout } w \in V,$$

c'est-à-dire que A est injectif. Pour montrer que A est surjectif, c'est à dire que $\text{Im}(A) = V$ (ce qui n'est pas évident si V est de dimension infinie), il suffit de montrer que $\text{Im}(A)$ est fermé dans V et que $\text{Im}(A)^\perp = \{0\}$. En effet, dans ce cas on voit que $V = \{0\}^\perp = (\text{Im}(A)^\perp)^\perp = \overline{\text{Im}(A)}$, ce qui prouve que A est surjectif. Soit $A(w_n)$ une suite dans $\text{Im}(A)$ qui converge vers b dans V . D'après l'inégalité précédente, on a

$$\alpha \|w_n - w_p\| \leq \|A(w_n) - A(w_p)\|$$

qui tend vers zéro quand n et p tendent vers l'infini. Donc w_n est une suite de CAUCHY dans l'espace de Hilbert V , c'est-à-dire qu'elle converge vers une limite $w \in V$. Alors, par continuité de A on en déduit que $A(w_n)$ converge vers $A(w) = b$, c'est à dire que $b \in \text{Im}(A)$ et $\text{Im}(A)$ est donc fermé. D'autre part, soit $v \in \text{Im}(A)^\perp$; la coercivité de a implique que

$$\alpha \|v\|^2 \leq a(v, v) = (A(v), v) = 0.$$

Finalement $v = 0$ et $\text{Im}(A)^\perp = \{0\}$, ce qui prouve que A est bijectif. □

Proposition 2.2 — *On se place sous les hypothèses du théorème de LAX-MILGRAM. On suppose de plus que a est symétrique. Soit $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction, dite d'énergie, définie par*

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v).$$

On a l'équivalence :

$$u \text{ est (l'unique) minimiseur de } J \Leftrightarrow u \text{ est (l'unique) solution de (FV).}$$

DÉMONSTRATION — Soit u la solution de (FV) qui existe et est unique par le théorème de LAX-MILGRAM. Soit $w \in V$ et $v = w - u \in V$. On a

$$\begin{aligned} J(w) &= J(u + v) = \frac{1}{2}a(u + v, u + v) - L(u + v) \\ &= J(u) + \frac{1}{2}a(v, v) + a(u, v) - L(v) \text{ (symétrie de } a) \\ &= J(u) + \frac{1}{2}a(v, v) \text{ (} u \text{ solution de (FV))} \\ &\geq J(u) \text{ (} a \text{ coercive),} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que u minimise J .

Réciproquement, soit u un minimiseur de J et $v \in V$ et soit $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $j(t) = J(u + tv)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a que j est dérivable sur l'ouvert \mathbb{R} et atteint un minimum en $t = 0$ donc $j'(0) = 0$. Calculons la dérivée de j

$$\begin{aligned} j'(t) &= \langle v, \nabla J(u + tv) \rangle \\ &= a(v, u + tv) - L(v). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $v \in V$, le fait que $j'(0) = 0$ implique que u est solution de (FV). \square

2.2 Retour sur l'exemple de la section 1

On reprend le problème introduit dans la section 1. Pour simplifier on se place dans le cas particulier où la condition aux limites est de type DIRICHLET sur l'ensemble du bord du domaine :

$$u(x) = 0, \forall x \in \Gamma.$$

Le problème variationnel est donc le suivant :

trouver $u \in C^1(\overline{\Omega})$ vérifiant

$$\begin{cases} u = 0, \text{ sur } \Gamma, \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + c \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv, \forall v \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \Gamma_D. \end{cases}$$

Afin de se placer dans le cadre du théorème de LAX-MILGRAM on introduit les éléments de notation suivants :

- soit $V = \{v \in C^1(\overline{\Omega}); v|_{\Gamma} = 0\}$,
- soit $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + c \int_{\Omega} uv$; il s'agit clairement d'une forme bilinéaire,
- soit $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ la forme définie par $\int_{\Omega} fv$; il s'agit clairement d'une forme linéaire.

Le problème s'écrit désormais :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v), \forall v \in V.$$

Définissons un produit scalaire sur l'espace V . Nous choisissons le produit scalaire suivant :

$$(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla w(x) dx, \forall v, w \in V,$$

qui a pour norme associée

$$\|v\| = \left[\int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla v(x) dx \right]^{1/2}, \forall v \in V.$$

On voit facilement que (\cdot, \cdot) est une forme bilinéaire symétrique positive. Vérifions qu'il s'agit effectivement d'un produit scalaire en vérifiant la propriété $((v, v) = 0 \Rightarrow v = 0)$.

$$(v, v) = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = 0 \Leftrightarrow \nabla v(x) = 0, \forall x \in \Omega.$$

On obtient que v est une constante sur $\overline{\Omega}$ car $\overline{\Omega}$ est un polygone qui n'a donc qu'une seule composante connexe. Enfin la condition aux limites assure que $v(x) = 0$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$.

Ce choix de produit scalaire assure que la forme bilinéaire a est continue et coercive. On a de plus que la forme linéaire L est continue. Nous détaillerons la preuve dans le paragraphe 2.4. Elle utilise le résultat suivant (qui est une version restreinte de l'inégalité de POINCARÉ).

Lemme 2.3 [inégalité de POINCARÉ (version C^1)] — Soit Ω un ouvert régulier borné de \mathbb{R}^d . Il existe une constante $C_P > 0$ telle que

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 \, dx \leq C_P \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla v(x) \, dx, \forall v \in C^1(\Omega) \text{ tel que } v|_{\Gamma} = 0.$$

Cependant, la première hypothèse du théorème de LAX-MILGRAM, à savoir que V est un espace de HILBERT n'est pas satisfaite. On rappelle que l'espace vectoriel V muni de (\cdot, \cdot) est un espace de HILBERT s'il est complet pour la norme induite par son produit scalaire et qu'un espace est dit complet si toutes les suites de CAUCHY sont convergente (ou la convergence s'entend bien sûr au sens de la norme que l'on considère). Ici, l'espace V n'est pas complet pour la norme introduite. Comme le montre l'exercice ci-dessous le problème vient du fait qu'il existe des suites de CAUCHY qui ne sont pas convergente dans V à cause de l'hypothèse de régularité qui est trop forte.

La solution qui est apportée à ce problème est de plonger l'équation dans un espace plus grand (en fait dans la fermeture de V) qui lui sera complet. C'est pourquoi nous introduisons dans le prochain paragraphe quelques éléments de la théorie des espaces de SOBOLEV.

Exercice 2.1 — Le but de cet exercice (emprunté à [1, 2]) est de montrer que l'espace V muni du produit scalaire défini plus haut n'est pas complet lorsque Ω est la boule ouverte unité de \mathbb{R}^d .

— Si $d = 1$, on définit la suite

$$u_n(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -1 < x < -n^{-1}, \\ (n/2)x^2 - 1 + (2n)^{-1} & \text{si } -n^{-1} \leq x \leq n^{-1}, \\ x - 1 & \text{si } n^{-1} < x < 1. \end{cases}$$

– Si $d = 2$, pour $0 < \alpha < 1/2$, on définit la suite

$$u_n(x) = |\log(|x|^2 + n^{-1})|^{\alpha/2} - |\log(1 + n^{-1})|^{\alpha/2}.$$

– Si $d \geq 3$, pour $0 < \beta < (N - 2)/2$, on définit la suite

$$u_n(x) = \frac{1}{(|x|^2 + n^{-1})^{\beta/2}} - \frac{1}{(1 + n^{-1})^{\beta/2}}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de CAUCHY dans V mais qu'elle ne converge pas dans V lorsque n tend vers l'infini.

La solution de cet exercice peut être trouvée ici :

<http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/map431/chapitre3.pdf>

Remarque 2.4 – On aurait pu choisir sur V une norme de type infinie pour laquelle V est complet mais ces normes ne sont pas induites par un produit scalaire donc on ne peut pas parler d'espace de HILBERT (sans même parler de satisfaire les autres hypothèses du théorème de LAX-MILGRAM).

2.3 Théorie de SOBOLEV

Dans toute cette section on suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert borné de classe C^1 (pour $d = 1, 2$ ou 3). On équipe Ω de la mesure de LEBESGUE dx . Pour commencer, nous rappelons la définition de l'espace $L^2(\Omega)$ mais il est supposé que cette notion n'est pas nouvelle.

Définition 2.5 [espace de LEBESGUE $L^2(\Omega)$] – On définit l'espace $\mathcal{L}^2(\Omega)$ des fonctions qui sont de carré intégrables :

$$\mathcal{L}^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

On définit alors l'espace $L^2(\Omega)$ comme étant $\mathcal{L}^2(\Omega)$ quotienté par la relation d'équivalence

$$v \sim w \text{ si } v(x) = w(x) \text{ pour presque tout } x \in \Omega.$$

Comme dx est la mesure de LEBESGUE il est implicite que tout est écrit en fonction de cette mesure (en particulier la notion de propriété « vraie presque partout »). Les éléments de $L^2(\Omega)$ sont des classes d'équivalences dont les représentants sont des fonctions de carré sommable qui sont égales presque partout. On ne peut donc pas parler de la valeur d'un élément de $L^2(\Omega)$ en un point de Ω .

Théorème 2.6 – Muni du produit scalaire défini par

$$(v, w)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} v(x)w(x) dx, \forall v, w \in L^2(\Omega),$$

l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de HILBERT. On note $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ la norme associée :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

En utilisant le résultat de densité qui sera énoncé au théorème 2.3 on peut démontrer le résultat suivant.

Lemme 2.7 [Généralisation du lemme 1.4] – Soit $w \in L^2(\Omega)$. On a l'implication suivante

$$\left(\int_{\Omega} w(x)\varphi(x) dx = 0, \forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega) \right) \Rightarrow (w(x) = 0 \text{ pour presque tout } x \in \Omega).$$

Puisque l'on considère des équations différentielles, on va avoir besoin d'espaces plus réguliers que $L^2(\Omega)$ qui satisfont certaines propriétés de dérivabilité et de régularité des dérivées. On introduit d'abord la notion de dérivation au sens faible.

Définition 2.8 [dérivation au sens faible] – Soit $v \in L^2(\Omega)$. On dit que v est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe des fonctions $w_i \in L^2(\Omega)$ pour tout $1 \leq i \leq d$ qui satisfont

$$\int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} w_i(x) \varphi(x) dx; \forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega).$$

La fonction w_i est alors appelée la dérivée partielle de v par rapport à la i -ème variable et on note $w_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$.

Dans la définition on teste la dérivée partielle contre toutes les fonctions indéfiniment dérivable à support compact dans Ω (c'est-à-dire les fonctions de l'espace $C_C^\infty(\Omega)$) et on fait porter à ses fonctions φ l'opération de calcul de la dérivée.

Remarque 2.9 – La dérivée au sens faible est unique. Pour le montrer on suppose qu'il existe deux fonctions $w_i^{(1)}$ et $w_i^{(2)}$ qui satisfont la définition. Dans ce cas on a $\int_{\Omega} (w_i^{(1)}(x) - w_i^{(2)}(x))\varphi(x) dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$ ce qui implique que $w_i^{(1)} = w_i^{(2)}$ par le lemme 2.3.

Remarque 2.10 – La dérivée au sens faible généralise la dérivée classique : si une fonction admet une dérivée au sens classique alors elle admet une dérivée faible qui est égale à la dérivée au sens classique. On le montre en utilisant la formule de GREEN du corollaire 1.3 avec \mathbf{q} le champ de vecteur qui a toutes ses composantes nulles sauf la i -ème qu'on prend égale à une fonction test $\varphi \in C_C^\infty$. Ceci justifie le fait d'utiliser la même notation que dans le cas classique. On étend aussi naturellement aux fonctions dérivables de $L^2(\Omega)$ la définition des opérateurs laplacien, gradient, divergence et dérivée normale introduits dans les équations (2) et (3).

On introduit maintenant un premier espace de SOBOLEV.

Définition 2.11 [espace de SOBOLEV $H^1(\Omega)$] – On définit

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq d \right\}.$$

Il s'agit d'un espace de HILBERT pour le produit scalaire dont on va le munir.

Théorème 2.12 – Muni du produit scalaire défini par

$$(v, w)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} v(x)w(x) dx + \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla w(x) dx, \forall v, w \in H^1(\Omega),$$

l'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de HILBERT. On note $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ la norme associée :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla v(x) dx \right]^{1/2}.$$

Dans la suite de cette partie, nous allons chercher des solutions à des formulation variationnelles dans l'espace $H^1(\Omega)$. Comme nous voulons imposer des conditions aux limites, il nous faut une manière de parler de la valeur prise par une fonction sur le bord de Ω (ce qui est loin d'être trivial). C'est le rôle du théorème suivant.

Théorème 2.13 [théorème de trace] – Soit Ω un ouvert borné régulier, de frontière Γ . On définit l'application suivante que l'on nomme l'application trace

$$\gamma_0 : \begin{array}{l} H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \rightarrow L^2(\Gamma) \cap C(\overline{\Gamma}) \\ v \mapsto \gamma_0(v) = v|_{\Gamma} \end{array}$$

Cette application se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, que l'on choisit de noter encore γ_0 . En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$,

on a

$$\|v|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Le théorème de trace nous permet de parler de la valeur (on parle généralement de trace) d'une fonction de H^1 sur le bord de Ω (ce qu'on ne peut pas faire pour une fonction dans $L^2(\Omega)$ par exemple) et de définir le sous-espace suivant.

Définition 2.14 [*espace $H_0^1(\Omega)$*] – Soit $H_0^1(\Omega)$ le sous espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions de $H^1(\Omega)$ dont la trace sur le bord de Ω est nulle :

$$H_0^1(\Omega) = \ker(\gamma_0).$$

Proposition 2.15 – L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de HILBERT pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

DÉMONSTRATION – Par définition $H_0^1(\Omega)$ est un sous espace de l'espace de HILBERT $H^1(\Omega)$ qui est fermé comme image réciproque par une application continue du fermé $\{0\}$. \square

Théorème 2.16 – Muni du produit scalaire défini par

$$(v, w)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla w(x) \, dx, \quad \forall v, w \in H_0^1(\Omega),$$

l'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de HILBERT. On note $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ la norme associée :

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla v(x) \, dx \right]^{1/2}.$$

On a introduit une deuxième norme sur $H_0^1(\Omega)$ (qui n'est pas une norme sur $H^1(\Omega)$ mais seulement une semi-norme). Cette norme est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Le résultat suivant, appelé inégalité de POINCARÉ, permet de démontrer l'une des inégalités dans la preuve de l'équivalence.

Théorème 2.17 [*inégalité de POINCARÉ*] – Soit Ω un ouvert régulier borné de \mathbb{R}^d . Il existe une constante $C_P > 0$ telle que

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 \, dx \leq C_P \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla v(x) \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On ne démontre pas l'inégalité de POINCARÉ. La preuve utilise un résultat de compacité : le théorème de RELICH (« de toute suite bornée dans $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergent dans $L^2(\Omega)$ » ou encore « l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte »). Le théorème suivant contient des résultats de densité qui sont très importants.

Théorème 2.18 [Résultats de densité] — On a les résultats de densité suivants :

- L'espace $C_C^\infty(\Omega)$ (des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact dans Ω) est dense dans $L^2(\Omega)$. Ceci signifie que pour tout élément $v \in L^2(\Omega)$ il existe une suite v_n d'éléments de $C_C^\infty(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - v_n\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

- L'espace $C_C^\infty(\overline{\Omega})$ (des fonctions indéfiniment dérivable à support compact dans $\overline{\Omega}$) est dense dans $H^1(\Omega)$.
- L'espace $C_C^\infty(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$.

On utilisera les résultats de ce théorème pour démontrer des résultats dans $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ en le faisant d'abord dans des espaces de fonctions régulières puis en utilisant des arguments dits *de densité*. Une autre manière de voir, par exemple, le deuxième résultat est que $H^1(\Omega)$ est la fermeture d'un espace de fonctions régulières, c'est à dire l'ensemble de ces fonctions régulières complété par les limites de suites de ces fonctions (les limites étant prises pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$).

Remarque 2.19 — Dans le théorème 2.3, on mentionne l'espace $C_C^\infty(\overline{\Omega})$ ce qui peut sembler une complication inutile puisqu'il est égal à $C^\infty(\overline{\Omega})$ dans le cas où Ω est borné. Le résultat tel qu'écrit dans le théorème reste vrai si $\Omega = \mathbb{R}^d$ ou $\Omega = \mathbb{R}_+^d$.

Nous avons besoin d'espaces plus réguliers que $H^1(\Omega)$ pour écrire la formulation faible des équations aux dérivées partielles qui nous intéressent (qui font intervenir des dérivées d'ordre au moins deux). Pour cela nous devons introduire les dérivées d'ordre supérieur à 1 au sens faible en généralisant la définition 2.3. On introduit d'abord ce qu'on appelle un multi-indice α , c'est à dire un d -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$. En notant $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ l'ordre de dérivée totale on note

$$\partial^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}(x).$$

une dérivée d'ordre $|\alpha|$. Avec cette notation, nous disons qu'une fonction de $L^2(\Omega)$ est $|\alpha|$ fois dérivable au sens faible si toutes ses dérivées partielles faibles d'ordre $|\alpha| - 1$ existent et sont dérivables au sens de la définition 2.3. Il n'est pas nécessaire de préciser l'ordre dans lequel on applique les dérivées en vertu du théorème de SCHWARZ.

Définition 2.20 — Pour $m \in \mathbb{N}^*$, l'espace de SOBOLEV $H^m(\Omega)$ est défini par

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\}.$$

Théorème 2.21 – Muni du produit scalaire

$$(v, w)_{H^m(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha v \partial^\alpha w,$$

et de la norme $\|v\|_{H^m(\Omega)} = (v, v)_{H^m(\Omega)}^{1/2}$, l'espace de SOBOLEV $H^m(\Omega)$ est un espace de HILBERT.

Théorème 2.22 – L'espace $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ (des fonctions indéfiniment dérivable à support compact dans $\overline{\Omega}$) est dense dans $H^m(\Omega)$.

Théorème 2.23 [extension de la formule de GREEN du corollaire 1.3] – Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^2 . Si $w \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \Delta w v = - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v + \int_{\Gamma} \partial_n w v.$$

DÉMONSTRATION – La preuve utilise le résultat du corollaire 1.3 (qui est le même résultat dans des espaces de fonctions régulières) et le résultat de densité du théorème 2.3. Un autre résultat est nécessaire (sur un nouvel opérateur de trace) que nous ne donnerons pas ici. \square

Dans cette section nous n'avons fait qu'effleurer la théorie des espaces de SOBOLEV. Pour un cours approfondie sur le sujet nous renvoyer le lecteur ou la lectrice au livre d'Haïm BREZIS [4].

2.4 Retour plus fructueux sur l'exemple de la section 1

Comme dans le paragraphe 2.2, on considère le problème modèle introduit à la section 1 en se limitant au cas particulier où la condition aux limites est de type DIRICHLET homogène sur Γ en entier. Afin de se placer dans le cadre du théorème de LAX-MILGRAM, on introduit les éléments de notation suivants :

- soit $V = H_0^1(\Omega)$; $(\cdot, \cdot)_V = (\cdot, \cdot)_{H_0^1(\Omega)}$; $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$,
- soit $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + c \int_{\Omega} uv$; il s'agit clairement d'une forme bilinéaire,
- soit $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ la forme définie par $L(v) = \int_{\Omega} f v$; il s'agit clairement d'une forme linéaire.

Le problème s'écrit désormais :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v), \forall v \in V.$$

Le théorème de LAX-MILGRAM s'applique à ce problème comme nous le montrons dans le théorème suivant.

Théorème 2.24 – Le problème variationnel :

trouver $u \in V$ tel que $a(u, v) = L(v), \forall v \in V$.

admet une unique solution.

DÉMONSTRATION – Toutes les hypothèses du théorème de LAX-MILGRAM sont satisfaites :

- V muni du produit scalaire choisi est un espace de HILBERT,
- a est continue avec $M = 1 + c C_P$ (C_P étant la constante donnée par l'inégalité de POINCARÉ dans le théorème (2.3) et c la constante dans l'équation) :

$$a(v, w) \leq \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)} + c \|v\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq (1 + c C_P) \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)},$$

où on a appliqué l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ et l'inégalité de POINCARÉ.

- a est coercive avec $\alpha = 1$:

$$a(v, v) \geq \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

- L est continue avec $C = \|f\|_{L^2(\Omega)}$:

$$L(v) = \int_{\Omega} f v \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P^{1/2} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

La conclusion du théorème nous donne l'existence et l'unicité de la solution u . □

Il reste à vérifier qu'il y a un lien entre la solution du problème dans sa forme variationnelle et la solution du problème de départ (donné sous forme forte). C'est l'objectif du résultat suivant.

Théorème 2.25 – Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ est solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Alors u est l'unique solution du problème variationnel :

trouver $u \in V$ tel que $a(u, v) = L(v), \forall v \in V$.

DÉMONSTRATION – Supposons que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ est la solution du premier problème. Alors $u \in H^2(\Omega)$. En multipliant l'équation par une fonction test $v \in V = H_0^1(\Omega)$ et en appliquant le théorème 2.3, on obtient que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + c \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} f v + \int_{\partial\Omega} \partial_n u v = \int_{\Omega} f v \Leftrightarrow a(u, v) = L(v),$$

ce qui termine cette courte preuve. □

La solution forte du problème est donc aussi une solution faible. La réciproque de ce théorème est plus délicate et il faudra préciser dans quel sens la solution faible peut être considérée comme une solution forte.

Théorème 2.26 – Supposons que u est l'unique solution du problème variationnel :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v), \forall v \in V.$$

Supposons de plus que $u \in H^2(\Omega)$ et que l'ouvert Ω est borné et régulier. Alors u satisfait aussi l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f, & \text{presque partout dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{presque partout sur } \Gamma. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION – Ayant fait l'hypothèse que $u \in H^2(\Omega)$ on peut appliquer la formule de GREEN du théorème 2.3 pour obtenir :

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + cu - f) v = 0 \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ce résultat est vrai en particulier pour tout $v \in C_C^\infty(\Omega)$ ce qui implique $-\Delta u + cu = f$ au sens de $L^2(\Omega)$ (d'après le lemme 2.3), c'est-à-dire pour presque tout $x \in \Omega$. La condition aux limites provient de la définition de $H_0^1(\Omega)$. \square

Remarquons qu'on a du faire une hypothèse de régularité supplémentaire sur la solution faible du problème. On peut aussi montrer des résultats sans cette hypothèse de régularité (voir par exemple [2]).

2.5 Approximation interne (ou approximation de GALERKIN)

L'approximation interne consiste à remplacer l'espace de HILBERT V dans lequel on cherche la solution (et dans lequel on prend les fonctions tests) par un sous espace vectoriel $V_h \subset V$ de dimension finie. Ceci permet d'introduire une base de V_h et de remplacer la recherche de la solution par celle de ses coordonnées dans la base choisie (qui sera ici une base d'éléments finis).

Lemme 2.27 – Sous les hypothèses du théorème de LAX-MILGRAM et avec $V_h \subset V$ un sous espace vectoriel de dimension finie, le problème

$$\text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h \quad (\text{FV}_h)$$

admet une unique solution.

DÉMONSTRATION — Il suffit d'appliquer le théorème de LAX-MILGRAM à ce nouveau problème ($V_h \subset V$ est encore un espace de HILBERT car les sous espace vectoriels de dimension finie sont fermés). \square

Lemme 2.28 — *Sous les hypothèses précédentes la solution u_h de (FV_h) peut s'obtenir en résolvant un système linéaire de matrice définie positive (et symétrique si a est symétrique).*

DÉMONSTRATION — On a supposé que V_h est un sous-espace vectoriel de V de dimension finie. Notons n cette dimension et $(\Phi_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de V_h . On a alors (essentiellement par linéarité) les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) &= L(v_h), \forall v_h \in V_h \\ \Leftrightarrow a(u_h, \Phi_j) &= L(\Phi_j), \forall j = 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n u_h^i a(\Phi_i, \Phi_j) &= L(\Phi_j), \forall j = 1, \dots, n, \text{ en notant } u_h = \sum_{i=1}^n u_h^i \Phi_i; u_h^i \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{U}_h &= \mathbf{b} \text{ avec } \mathbf{U}_h = \begin{pmatrix} u_h^1 \\ \vdots \\ u_h^n \end{pmatrix} \text{ et } \begin{matrix} \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}; & A_{ij} = a(\Phi_i, \Phi_j) \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n \\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n; & b_j = L(\Phi_j) \text{ pour } 1 \leq j \leq n \end{matrix} . \end{aligned}$$

On a ramené le problème à la résolution d'un système linéaire. On remarque que si a est symétrique, la matrice \mathbf{A} est aussi symétrique. Enfin, montrons que \mathbf{A} est inversible. Il suffit de montrer que pour $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ on a l'implication : si $\mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} = 0$ alors $\mathbf{v} = 0$. Soit donc $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i A_{ij} v^j = 0 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i a(\Phi_i, \Phi_j) v^j = 0 \\ &= a\left(\sum_{i=1}^n v^i \Phi_i, \sum_{j=1}^n v^j \Phi_j\right) = 0 \\ &= a(v, v). \end{aligned}$$

La coercivité de a permet de conclure. \square

Lemme 2.29 [Lemme de CÉA] — *Sous les hypothèses précédentes. Soit u la solution de (FV) et u_h la solution de (FV_h) , on a :*

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

DÉMONSTRATION — Soit $w_h \in V_h \subset V$. On a, par linéarités

$$\begin{cases} a(u, w_h) = L(w_h) \\ a(u_h, w_h) = L(w_h) \end{cases} \Rightarrow a(u - u_h, w_h) = 0, \forall w_h \in V_h. \quad (*)$$

Soit maintenant $v_h \in V_h$, il résulte de la coercivité de a , de la linéarité de a par rapport à la seconde variable et de la continuité de a (dans l'ordre d'utilisation des arguments) que

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + \underbrace{a(u - u_h, v_h - u_h)}_{=0 \text{ par } (*)} \\ &\leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\|. \end{aligned}$$

Si $u = u_h$ la conclusion du lemme est évidente. Sinon on peut simplifier par $\|u - u_h\|$. \square

Remarque 2.30 [Cas symétrique] — Dans le cas où la forme bilinéaire a est symétrique, l'identité (*) dans la preuve signifie que u_h est la projection orthogonale de u sur V_h où l'orthogonalité est donnée par le produit scalaire $a(\cdot, \cdot)$. On a alors

$$\alpha^{1/2} \|u - u_h\|_a \leq \|u - u_h\|_a = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_a \leq M^{1/2} \|u - v_h\|.$$

Donc le résultat du lemme de CÉA reste vrai en prenant la racine carrée de la constante ce qui améliore le résultat.

Remarque 2.31 —

- Le lemme de CÉA nous dit que l'erreur qu'on commet sur la solution u du problème de départ en résolvant à la place le problème approché dans le sous espace V_h est bornée par l'erreur d'interpolation de u par le meilleur élément de V_h .
- La constante dans le lemme ne dépend pas de V_h donc si on arrive à choisir une famille d'espaces V_h indexés par h tels que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| = 0,$$

alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0.$$

C'est ce qu'on va faire avec les espaces d'éléments finis où h sera une longueur caractéristique d'un maillage du domaine Ω sous-jacent à l'espace d'élément fini.

Lemme 2.32 — On se place sous les hypothèses du théorème de Lax Milgram. Soit $\mathcal{V} \subset V$, un sous-espace dense dans V . Soient, pour chaque $h > 0$, un sous-espace vectoriel V_h de V de dimension finie et une application (appelée opérateur d'interpolation) $r_h : \mathcal{V} \rightarrow V_h$, tels que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h(v)\| = 0, \forall v \in \mathcal{V}.$$

Alors la méthode d'approximation variationnelle interne converge :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0.$$

DÉMONSTRATION — Soit $\epsilon > 0$.

- En appliquant le lemme de CÉA on obtient que $\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - r_h(v)\|, \forall v \in \mathcal{V}$.
- La densité de \mathcal{V} dans V donne l'existence d'un élément $v \in \mathcal{V}$ tel que $\|u - v\| \leq \epsilon$.
- Par l'hypothèse du lemme, il existe $\eta > 0$ tel que $h < \eta \Rightarrow \|v - r_h(v)\| \leq \epsilon$.

En mettant ensemble ces trois arguments, et en appliquant l'inégalité triangulaire, on trouve :

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - r_h(v)\| \leq \frac{M}{\alpha} (\|u - v\| + \|v - r_h(v)\|) \leq \frac{2M}{\alpha} \epsilon,$$

ce qui conclut la preuve. □

3 Méthode des éléments finis de LAGRANGE : cadre abstrait

On introduit à présent une famille de choix particulier d'espace V_h . Ils reposent tous sur un maillage de l'espace Ω dans lequel est posé l'équation. On introduit d'abord des espaces de fonctions sur chaque élément du maillage.

3.1 Définitions

Définition 3.1 [Élément fini] — Un élément fini se définit localement par la donnée d'un triplet (K, X_K, Σ_K) , où

- K est un domaine simple,
 - X_K est un espace de fonctions définies sur K . On suppose de plus que X_K est de dimension finie égale à m .
 - Σ_K est un espace de m formes linéaires indépendantes $(\Psi_i)_{i=1, \dots, m}$ dont le domaine de définition contient X_K .
-

Définition 3.2 [Unisolvance] – Le triplet (K, X_K, Σ_K) est dit unisolvant si l'application

$$\Sigma_K : \begin{array}{l} X_K \rightarrow \mathbb{R}^m \\ v \mapsto (\Psi_1(v), \dots, \Psi_m(v)) \end{array} \text{ est un isomorphisme.}$$

S'agissant d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension m , Σ_K est un isomorphisme si elle est injective ou surjective.

3.2 Élément fini de LAGRANGE \mathbb{P}_1 sur un maillage triangulaire en deux dimensions

On revient sur l'élément fini introduit dans la première partie de ce cours. Il entre dans la définition abstraite d'un élément fini en posant :

- K : un des triangles du maillage,
- $X_k = \mathbb{P}_1(K)$: ensemble des fonctions linéaires sur K ,
- $\Sigma_k : v \mapsto (v(A_1), v(A_2), v(A_3))$ où A_1, A_2 et A_3 sont les sommets de K .

On a montré dans la première partie du cours que l'ensemble $\mathbb{P}_1(K)$ est de dimension 3 et qu'une fonction de cet espace est définie de façon unique par sa valeur à chacun des trois sommets. On a donc montré que l'élément fini $(K, \mathbb{P}_1(K), \Sigma_K)$ est unisolvant.

3.3 Éléments finis de LAGRANGE d'ordre plus élevés sur des triangles

De la même manière que l'on a défini l'élément fini de Lagrange $\mathbb{P}_1(K)$ comme étant l'ensemble des fonctions linéaires sur chaque triangle, on peut définir pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'élément

$$\mathbb{P}_k(K) = \{p : K \rightarrow \mathbb{R}; p \text{ est un polynôme de degré au plus } k\}.$$

La figure 6 montre un choix possible (et que l'on fait en général) de placement des degrés de liberté pour les éléments de Lagrange $\mathbb{P}_1(K)$ à $\mathbb{P}_3(K)$.

3.4 Éléments finis de LAGRANGE dans \mathbb{R}^3

Plus généralement, on parle d'élément fini de Lagrange \mathbb{P}_k lorsqu'on considère un espace d'élément fini constitué de fonctions continues et polynomiales de degré au plus k sur chaque élément du maillage. La figure 7 illustre les cas $k = 1, 2$ et 3 sur des éléments de types tétraèdre, prisme et hexaèdre. Seuls les degrés de liberté qui sont sur le bord de K apparaissent.

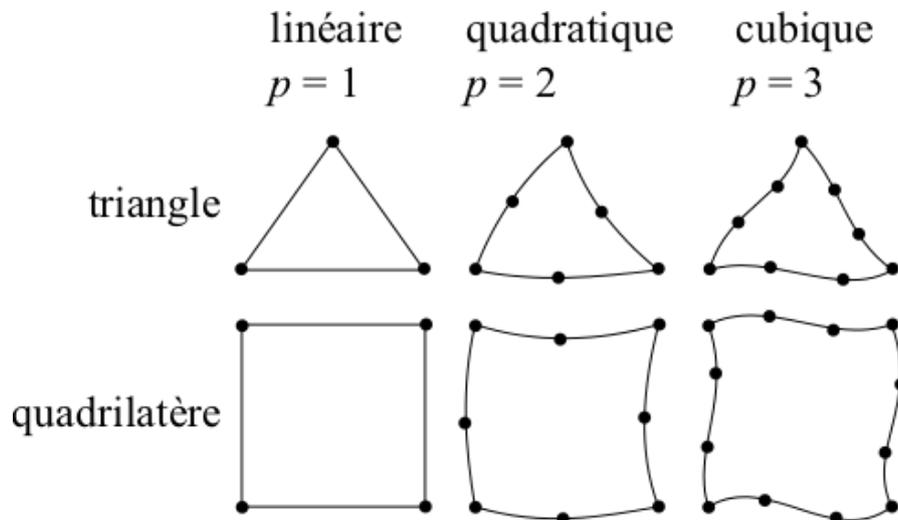


FIGURE 6 – Degrés de liberté pour l'élément fini de Lagrange triangulaire et quadrangulaire $\mathbb{P}_k(K)$ (pour $k = 1, \dots, 3$). (La figure provient de Wikipedia)

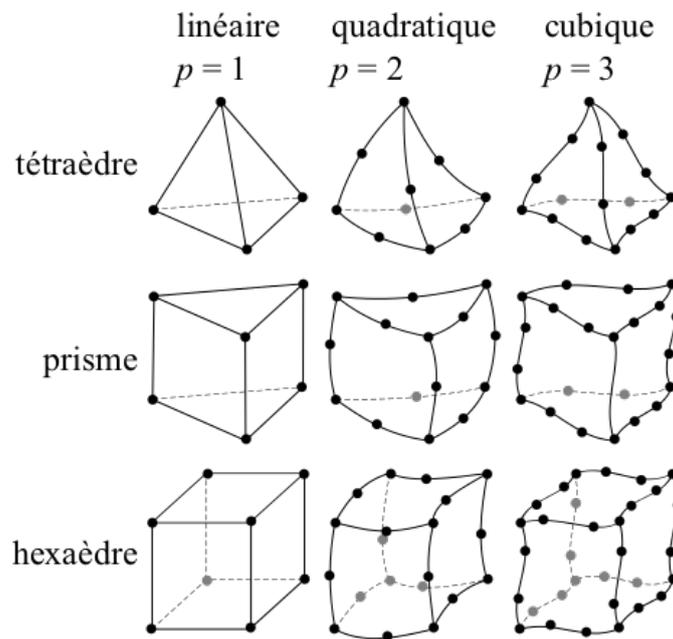


FIGURE 7 – Illustration des degrés de liberté des éléments de Lagrange en 3 dimension. (La figure provient de Wikipedia)

3.5 Assemblage de la matrice

La façon d'assembler la matrice du système linéaire est une question très importante pour l'efficacité de la méthode qui sera abordée dans le cours de David RYCKELYNCK.

3.6 Éléments de preuve pour la convergence des éléments finis

\mathbb{P}_k

Dans ce paragraphe les étapes principales de la preuve de convergence sont présentées. Pour une preuve détaillée, voir les notes de cours d'Eric Blayo [3][paragraphe 5].

On se place dans le cadre d'application du lemme de Céa (c'est-à-dire les hypothèses de Lax Milgram avec $V_h \subset V$ un sous espace vectoriel de dimension finie).

On suppose qu'on est dans le cas où $V = H^m(\Omega)$ et V_h est l'espace des éléments finis \mathbb{P}_k .

Soient u la solution de (FV) et u_h la solution de (FV_h). On a les estimations suivantes.

1. Par application du lemme de Céa,

$$\|u - u_h\|_{H^m(\Omega)} \leq \frac{C}{\alpha} \|u - \Pi_h u\|_{H^m(\Omega)},$$

où Π_h est l'interpolant \mathbb{P}_k .

Par exemple pour les éléments de Lagrange linéaires, $\Pi_h u = \sum_{s=1}^n u(S_i) \Phi_i$.

Attention pour que Π_h soit bien défini il faut que

$$k + 1 \geq d/2.$$

2. Passage en local :

$$\|u - \Pi_h u\|_{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - \Pi_h u\|_{H^m(K)}^2 = \sum_{l=0}^m \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |u - \Pi_h u|_{H^l(K)}^2,$$

où la semi-norme $|\cdot|_{H^l(K)}$ est définie par

$$|v|_{H^l(K)}^2 = \int_K \sum_{|\alpha|=l} \partial^\alpha v \partial^\alpha v,$$

de façon à ce que

$$\|v\|_{H^m(K)}^2 = \sum_{l=1}^m |v|_{H^l(K)}^2.$$

3. Passage à l'élément de référence \hat{K} : \hat{K} est le triangle de référence (dont les sommets sont aux points $(0;0)$, $(1;0)$ et $(0;1)$). On note F la transformation affine qui transforme \hat{K} en K . Elle est de la forme

$$F = B\hat{x} + b, \text{ où } B \in \mathbb{R}^d \text{ est inversible.}$$

Pour tout $0 \leq l \leq m$, si $v \in H^l(K)$, en posant $\hat{v} = v \circ F^{-1}$ on a

$$|\hat{v}|_{H^l(\hat{K})} \leq C(l, d) \|B\|_2^l |\det B|^{-1/2} |v|_{H^l(K)}, \quad (7)$$

et

$$|v|_{H^l(K)} \leq C(l, d) \|B^{-1}\|_2^l |\det B|^{1/2} |\hat{v}|_{H^l(\hat{K})}.$$

Les résultats s'obtiennent en changeant de variable dans les intégrales. Ceci permet d'obtenir que

$$|u - \Pi_h u|_{H^l(K)} \leq C(l, d) \|B^{-1}\|_2^l |\det B|^{1/2} |\hat{u} - \hat{\Pi} \hat{u}|_{H^l(\hat{K})}.$$

Un calcul relativement simple permet de montrer que

$$\|B\|_2 \leq \frac{h_K}{\hat{\rho}} \text{ et } \|B^{-1}\|_2 \leq \frac{\hat{h}}{\rho_K},$$

où h_K est le diamètre de K , ρ_K est le diamètre de la boule inscrite dans K , \hat{h} est le diamètre de \hat{K} , $\hat{\rho}$ est le diamètre de la boule inscrite dans \hat{K} .

On n'a pas besoin de travailler sur le terme $|\det B|^{1/2}$ car en faisant le changement de variable dans l'autre sens (retour sur l'élément K), ce terme se neutralisera avec $|\det B|^{-1/2}$.

4. Majoration sur l'élément de référence :

$$\|\hat{u} - \hat{\Pi}_h \hat{u}\|_{H^m(\hat{K})} \leq \hat{C} |\hat{u}|_{H^{k+1}(\hat{K})}.$$

avec les conditions supplémentaires que $k+1 \geq m$ et $u \in H^{k+1}(\Omega)$.

5. Retour sur K grâce à la formule de changement de variable (7) :

$$|\hat{u}|_{H^{k+1}(\hat{K})} \leq C(k+1, d) \|B\|_2^{k+1} |\det B|^{-1/2} |u|_{H^{k+1}(K)}.$$

6. On somme sur K pour retourner sur Ω

7. Conclusion :

$$\|u - \Pi_h u\|_{H^m(\Omega)} \leq C' h^{k+1-m} |u|_{H^{k+1}(\Omega)},$$

où h est tel que $h \geq h_K$ pour tous les triangles K , C' ne dépend pas de h mais dépend d'un nombre σ qui est tel que $\sigma \geq h_K/\rho_K$ pour tous les triangles K .

Le résultat est vrai seulement si

- $k+1 \geq m$ (résultat d'interpolation)
- $k+1 \geq d/2$ (définition de l'interpolateur Π_h avec des valeurs nodales,
- $u \in H^{k+1}(\Omega)$. En particulier ceci signifie qu'il n'y a pas d'intérêt à monter en ordre si la solution n'est pas suffisamment régulière.

Remarque 3.3 – *Il est inutile de monter en ordre si u n'est pas suffisamment régulière.*

Références

- [1] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions Ecole Polytechnique, 2005.
- [2] F. Alouges. *Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles*. Cours de l'Ecole Polytechnique, 2017.
- [3] E. Blayo. Notes de cours sur la méthode des éléments finis. *M1 Mathématiques Appliquées et Industrielles, Laboratoire Jean Kuntzmann, INRIA*, 2010.
- [4] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle - Théorie et applications*. Dunod, 1999.
- [5] A. Cohen. *Approximations variationnelles des EDP*. Cours de l'Université Pierre et Marie Curie, 2010.