Introduction à la méthode des éléments finis.

Teddy Chantrait

Le 23/11/2020

Qu'est-ce que la méthode éléments finis ?

Physique

Modélisation et
mise en équation(s)

EDP :

- Mécanique
- Thermique
- Electromagnétique
- Diffusion
- …

Solution exacte

Impossible dans la majortié des problèmes industriels

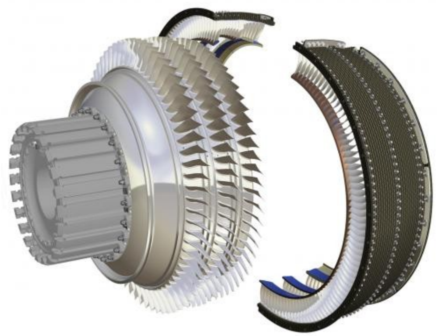
Solution **approchée**

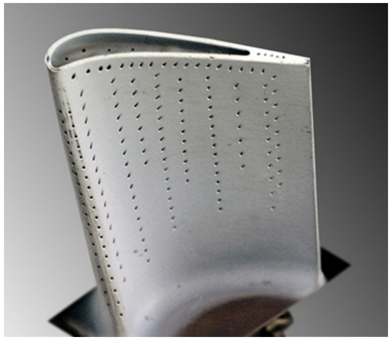
- **Méthode des éléments finis**
- Méthode des volumes finis
- Différences finies
- ...

Une technique de résolution approchée des EDP

Pourquoi chercher une solution approchée ?

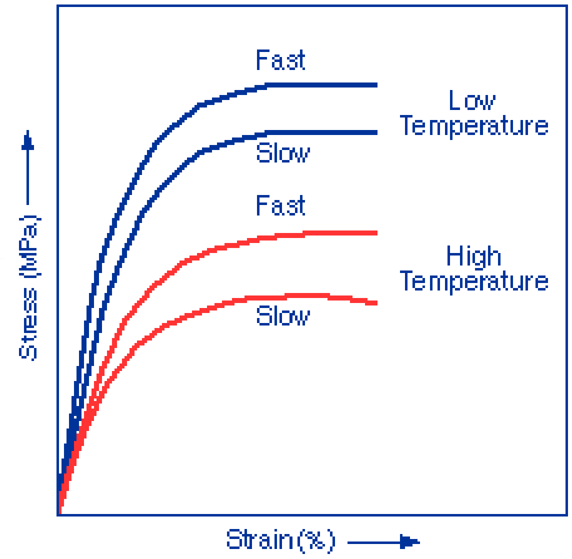
- Solution exacte souvent inaccessible car :
  - Géométries / domaines complexes

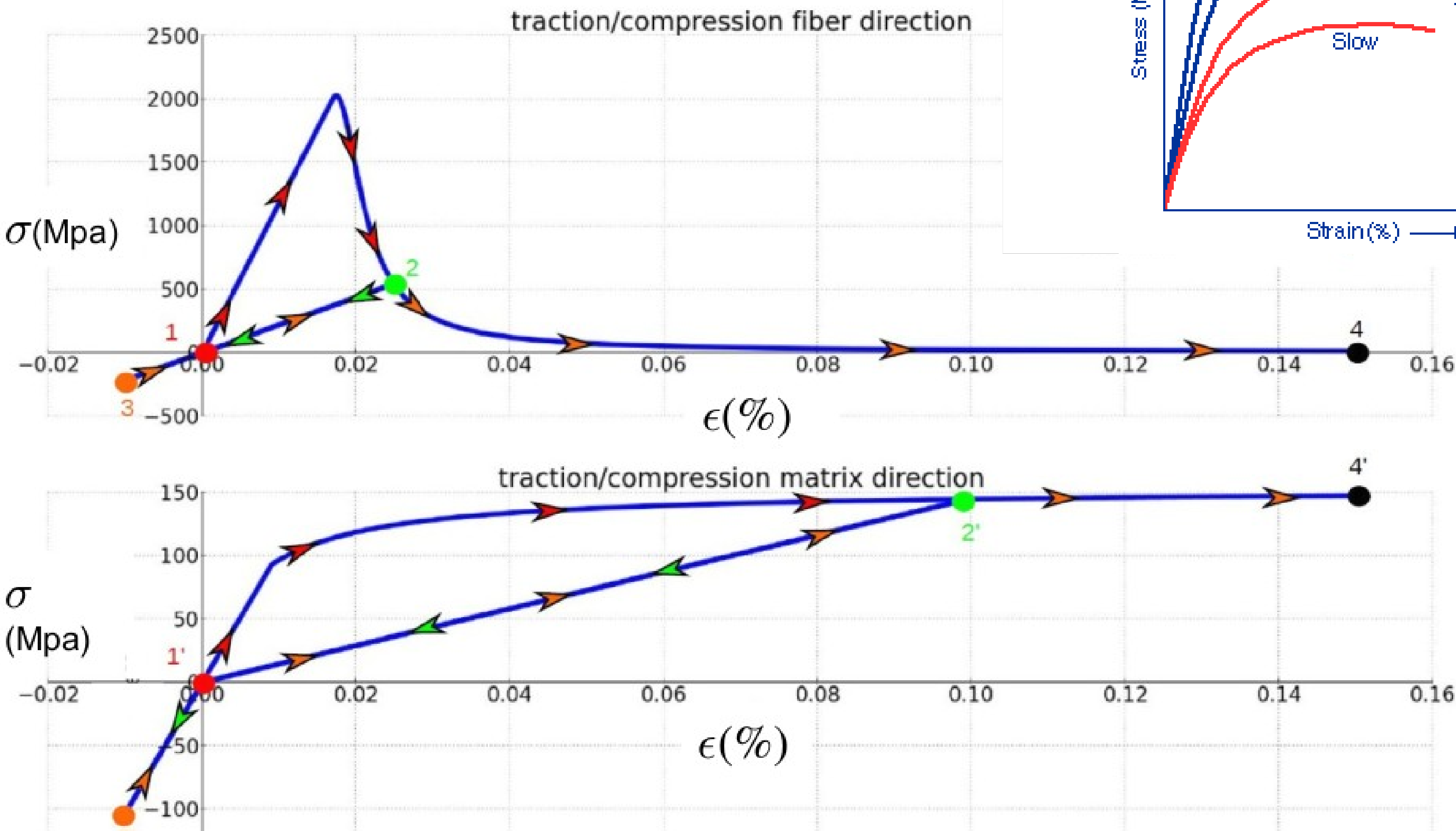




Pourquoi chercher une solution approchée ?

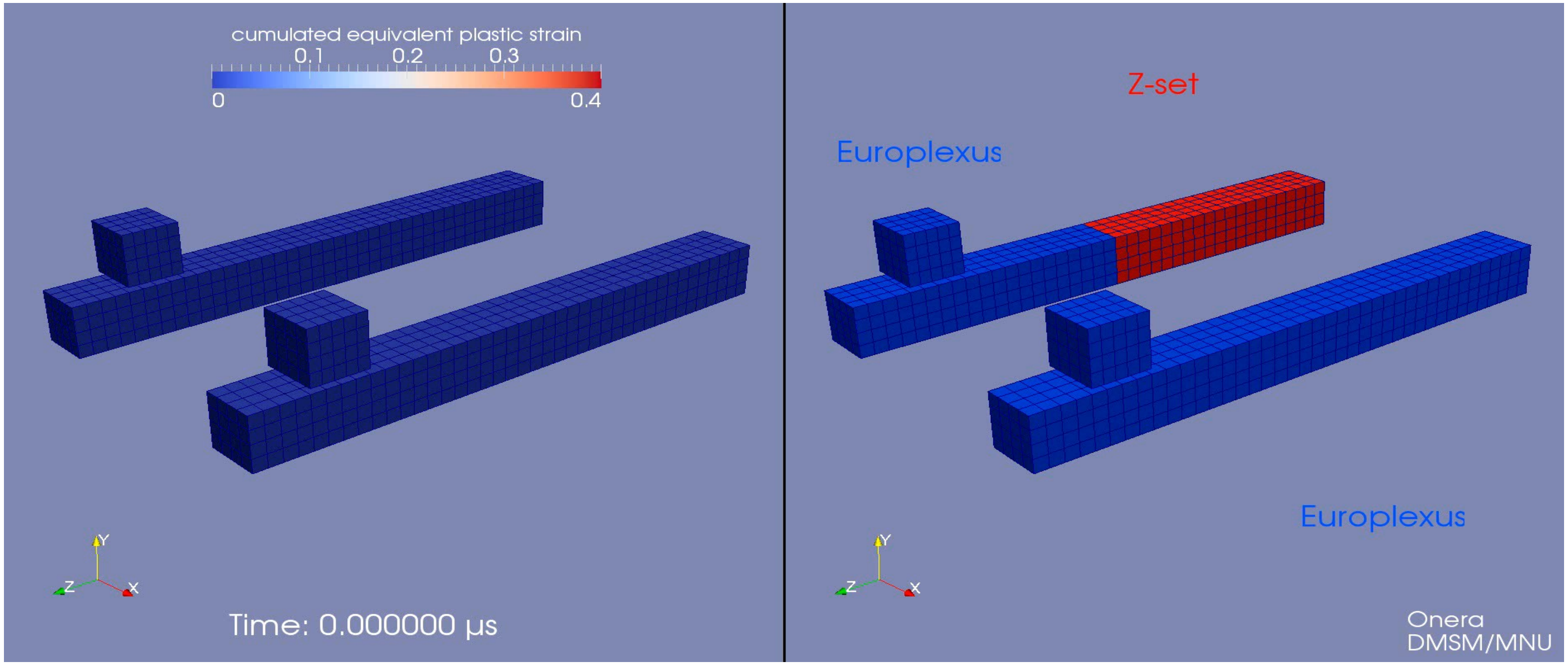
- Solution exacte souvent inaccessible car :
  - Propriétés matériaux nonlinéaires





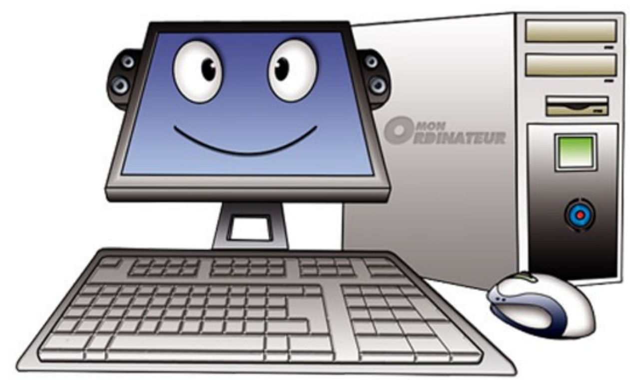
Pourquoi chercher une solution approchée ?

- Solution exacte souvent inaccessible car :
  - Chargement non-linéaire (contact, rupture fragile, etc.)



Les grandes étapes de la MEF

EDP → Formulation variationnelle → Linéarisation + discrétisation de l'espace et du temps → Système(s) matricielle(s) Linéaire(s) Ax = B



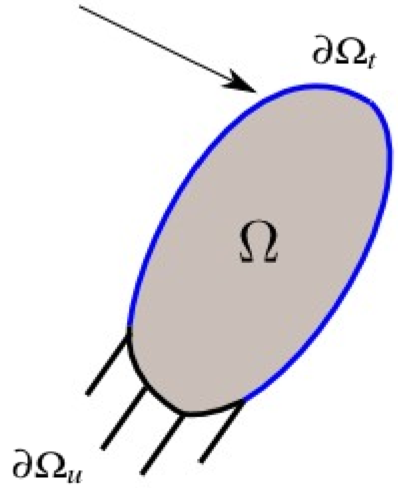
Les grandes étapes de la MEF

Thermique

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega, & \rho(x) C_P(x) \frac{dT}{dt}(x,t) = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{q(x)}}\right) + P(x) \\ \forall x \in \Omega, & T(x,0) = T_0(x) \\ \forall x \in \partial\Omega_u, & T(x,t) = T_{imp}(x,t) \\ \forall x \in \partial\Omega_t, & \frac{\partial T(x,t)}{\partial n} = \vec{n}(x) \cdot \vec{\nabla} T(x,t) = \phi_{imp}(x,t) \\ \forall x \in \Omega, & \overrightarrow{\mathrm{q(x)}} = \lambda(x)\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}(T(x)) \end{cases}$$

Mécanique

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega, & \rho(x) \frac{d^2 \vec{\mathrm{u}}}{dt^2}(x,t) = \overrightarrow{\mathrm{div}}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) + \vec{\mathrm{f}}(x) \\ \forall x \in \Omega, & \vec{\mathrm{u}}(x,0) = \vec{\mathrm{u}}_0(x) \\ \forall x \in \Omega, & \frac{d\vec{\mathrm{u}}}{dt}(x,0) = \vec{\mathrm{v}}_0(x) \\ \forall x \in \partial\Omega_u, & \vec{\mathrm{u}}(x,t) = \vec{u}_{imp}(x,t) \\ \forall x \in \partial\Omega_t, & \underline{\underline{\sigma}}.\vec{n}(x) = \vec{f}_{imp}(x,t) \\ \forall x \in \Omega, & \underline{\underline{\sigma}}(x) = \underline{\underline{\underline{\underline{H}}}}(x) : \underline{\underline{\varepsilon}}(x) \end{cases}$$



Les grandes étapes de la MEF

Thermique

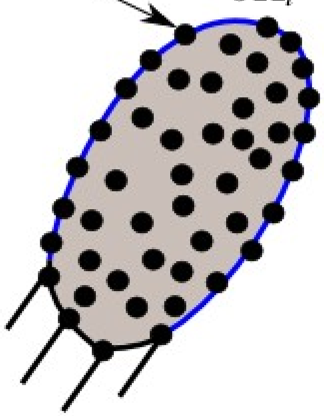
$$\begin{cases} \forall x \in \Omega, & \rho(x) C_P(x) \frac{dT}{dt}(x,t) = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{q(x)}}\right) + P(x) \\ \forall x \in \Omega, & T(x,0) = T_0(x) \\ \forall x \in \partial\Omega_u, & T(x,t) = T_{imp}(x,t) \\ \forall x \in \partial\Omega_t, & \frac{\partial T(x,t)}{\partial n} = \vec{n}(x) \cdot \vec{\nabla} T(x,t) = \phi_{imp}(x,t) \\ \forall x \in \Omega, & \overrightarrow{\mathrm{q(x)}} = \lambda(x) \overrightarrow{\mathrm{grad}}(T(x)) \end{cases}$$

Mécanique

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega, & \rho(x) \frac{d^2 \vec{\mathrm{u}}}{dt^2}(x,t) = \overrightarrow{\mathrm{div}}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) + \vec{\mathrm{f}}(x) \\ \forall x \in \Omega, & \vec{\mathrm{u}}(x,0) = \vec{\mathrm{u}}_0(x) \\ \forall x \in \Omega, & \frac{d\vec{\mathrm{u}}}{dt}(x,0) = \vec{\mathrm{v}}_0(x) \\ \forall x \in \partial\Omega_u, & \vec{\mathrm{u}}(x,t) = \vec{u}_{imp}(x,t) \\ \forall x \in \partial\Omega_t, & \underline{\underline{\sigma}}.\vec{n}(x) = \vec{f}_{imp}(x,t) \\ \forall x \in \Omega, & \underline{\underline{\sigma}}(x) = \underline{\underline{\underline{\underline{H}}}}(x) : \underline{\underline{\varepsilon}}(x) \end{cases}$$

MEF

MEF



Thermique transitoire :

$$\begin{cases} \mathbf{C}\{\dot{q}(t)\} + \mathbf{K}\{q(t)\} = \{b(t)\} \\ \text{cls + Condition initiale} \end{cases}$$

Thermique stationnaire :

$$\begin{cases} \mathbf{K}\{q(t)\} = \{b(t)\} \\ \text{cls + Condition initiale} \end{cases}$$

Dynamique :

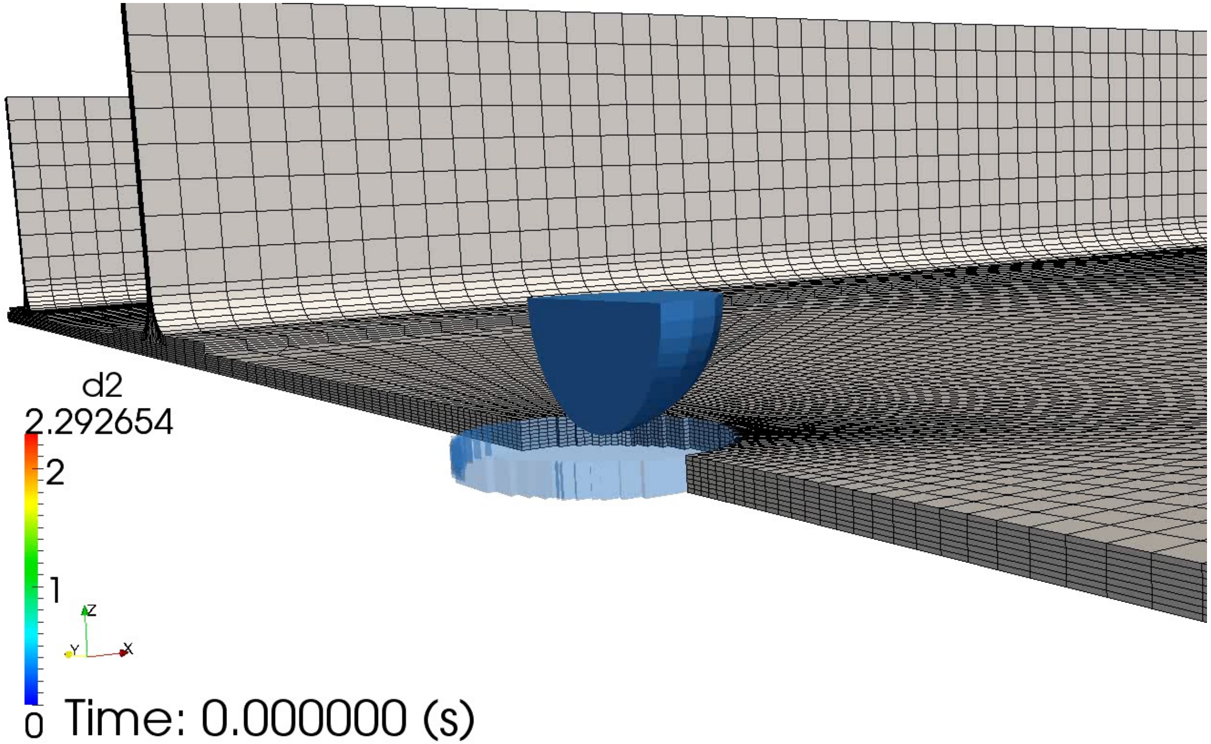
$$\begin{cases} \mathbf{M}\{\ddot{q}(t)\} + \mathbf{K}\{q(t)\} = \{f(t)\} \\ \text{cls + Conditions initiales} \end{cases}$$

Static :

$$\begin{cases} \mathbf{K}\{q(t)\} = \{f(t)\} \\ \text{cls + Condition initiale} \end{cases}$$

Champs d'application de la MEF

- Trouver une solution approchée de problèmes complexes non-linéaires en
  - Mécanique
  - Thermique
  - Fluide
  - Electromagnétique
  - Diffusion
  - Finance

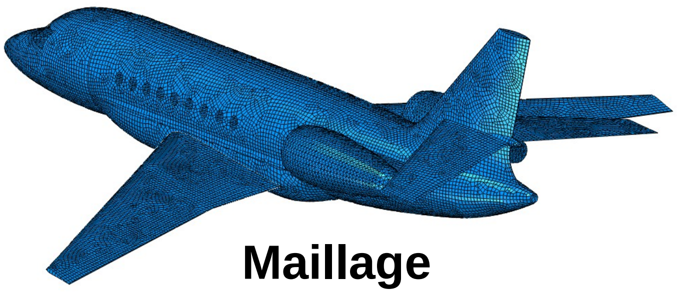


Champs d'application de la MEF



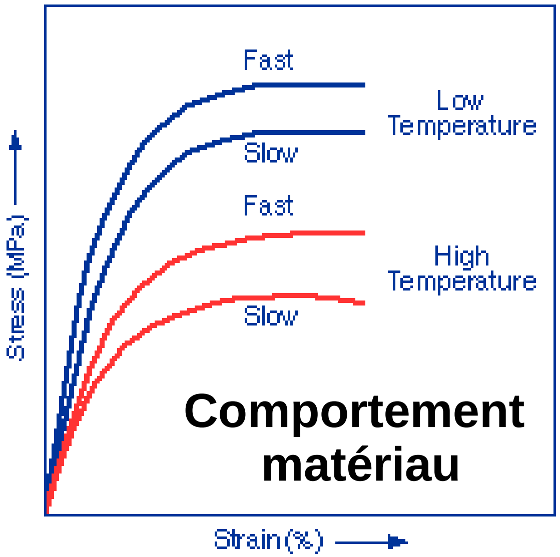


Quelles sont les données d'entrées ?



Maillage

MEF



Comportement matériau

- **Conditions limites**
  - Dirichlet : Chargement en déplacement, température, etc.
  - Neumann : Chargements en effort, flux, etc.

- **Conditions initiales**
  - U(t=0) = ?
  - V(t=0) = ?
  - T(t=0) = ?
  - Variables matériau = ?

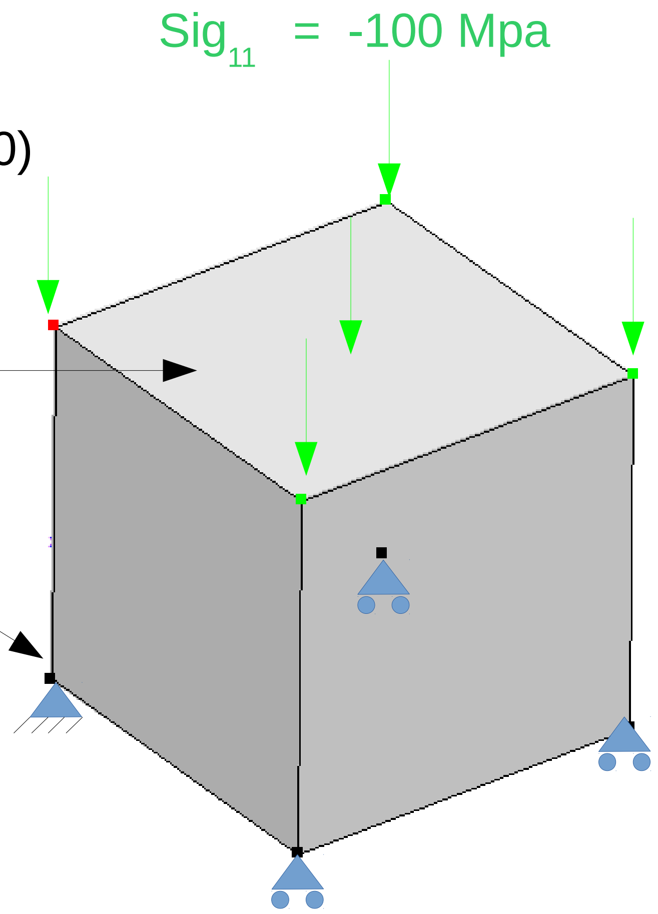
Exemple d'application de la MEF sur un cube unitaire en compression

- **Modèle :**
  Cube unitaire 1x1x1 mm^3
  Matériau élastique linéaire (E = 210000 Mpa, nu = 0)
  Calcul statique

- **Chargement :**
  Pression de 100 Mpa sur la face supérieure

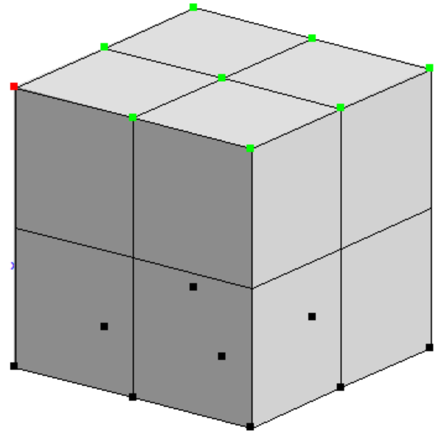
- **Conditions limites :**
  Face inférieure libre de se déplacer dans son plan
  Supression du mouvement de corps rigide

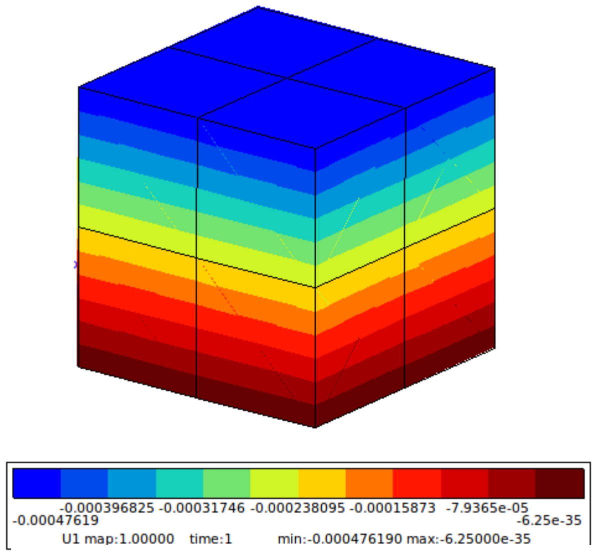
- **Résultats théoriques :**
  $Sig_{11} = -100$ Mpa
  $Eps_{11} = Sig_{11} / E = -4.762\ e^{-4}$ mm
  $U_1 = -4.762\ e^{-4}$ mm

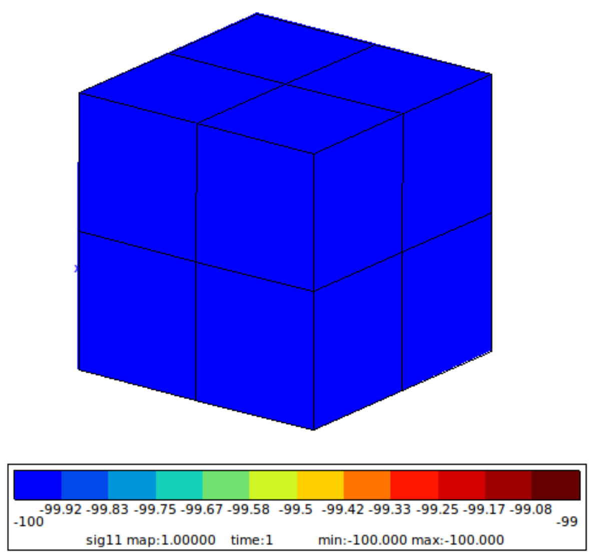


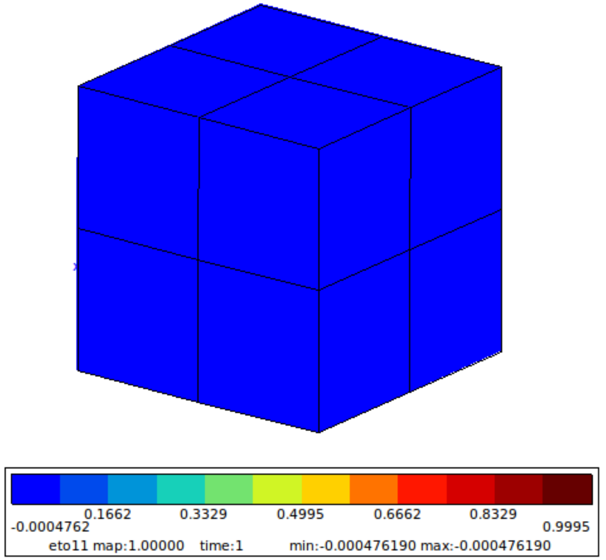
Exemple d'application de la MEF sur un cube unitaire en compression

Résultats 2 x 2 x 2 mailles



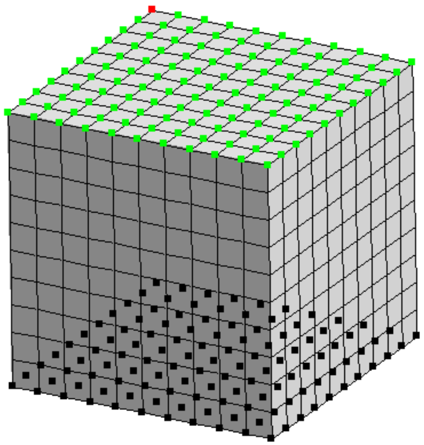


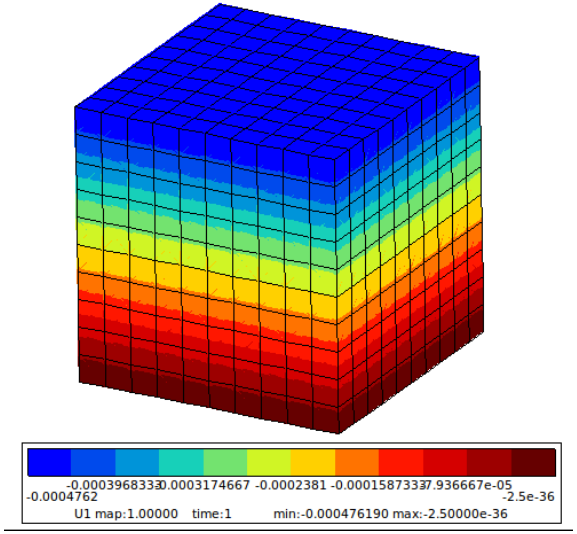


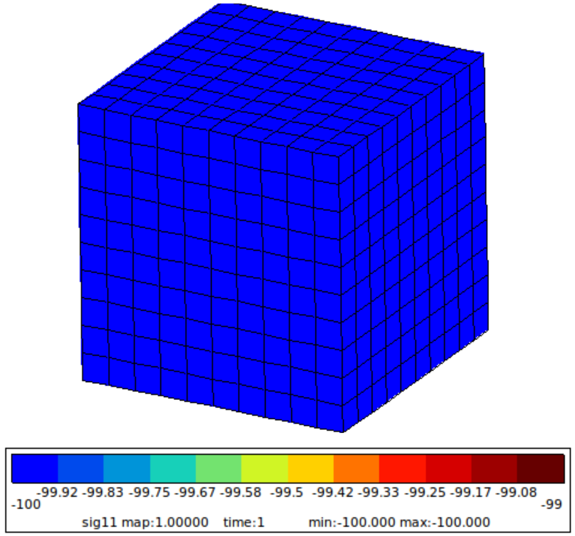


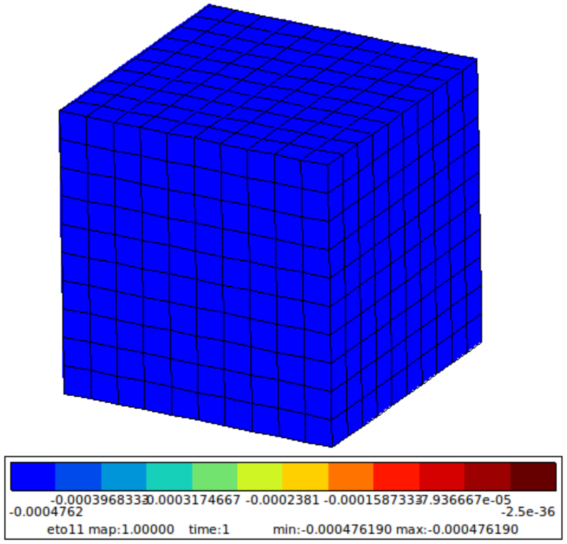
Exemple d'application de la MEF sur un cube unitaire en compression

Résultats 10 x 10 x 10 mailles



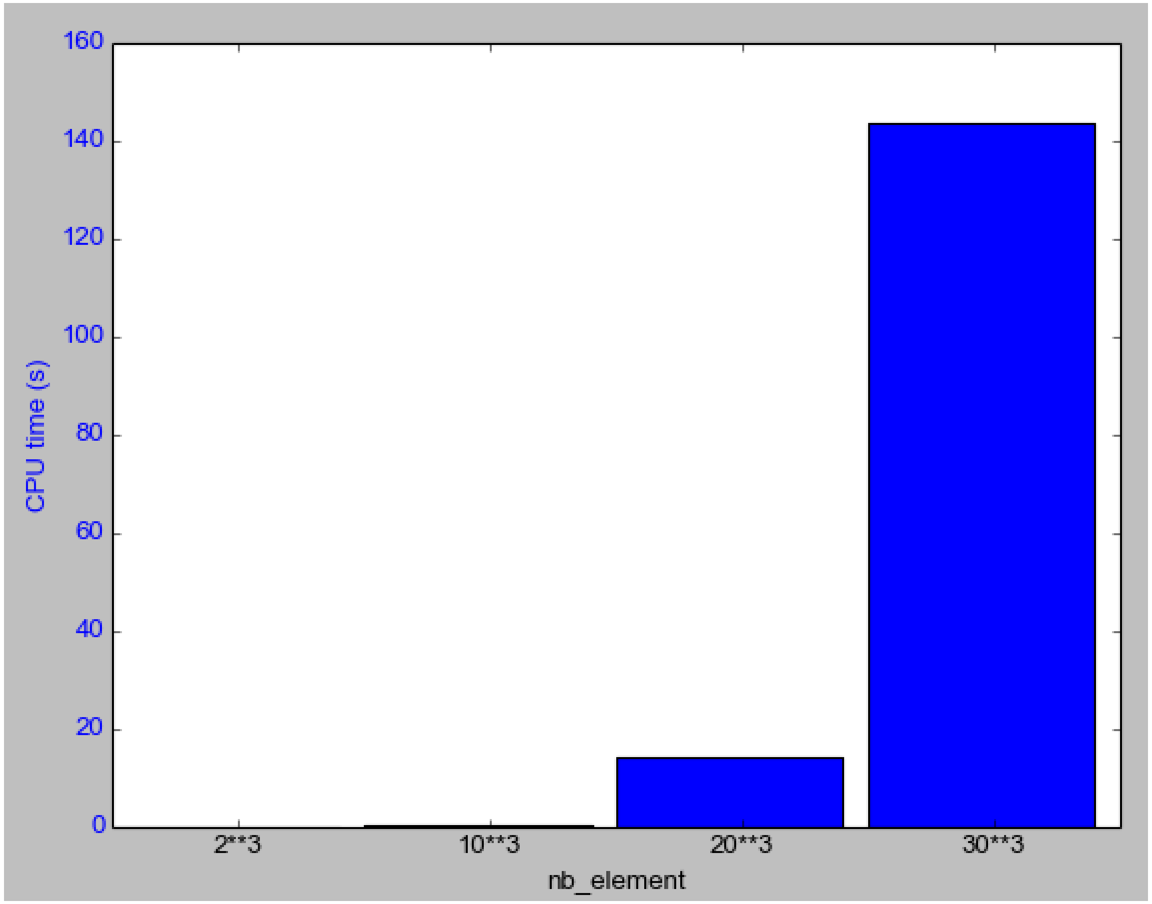






Exemple d'application de la MEF
sur un cube unitaire en compression

Evolution du temps de calcul en fonction du nombre d'éléments



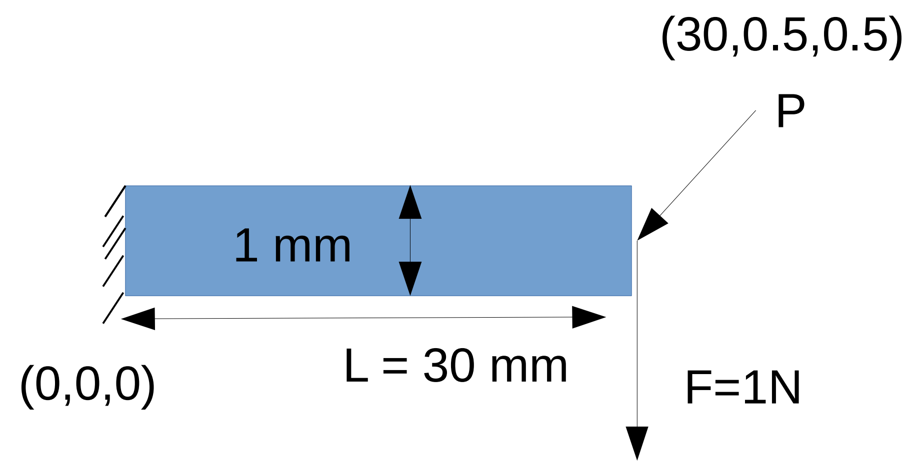
Exemple d'application de la MEF sur une poutre en flexion

- **Modèle :**
  Poutre de section unitaire et de longueur 30 mm
  Matériau élastique linéaire (E = 210000 Mpa, nu = 0)
  Calcul statique

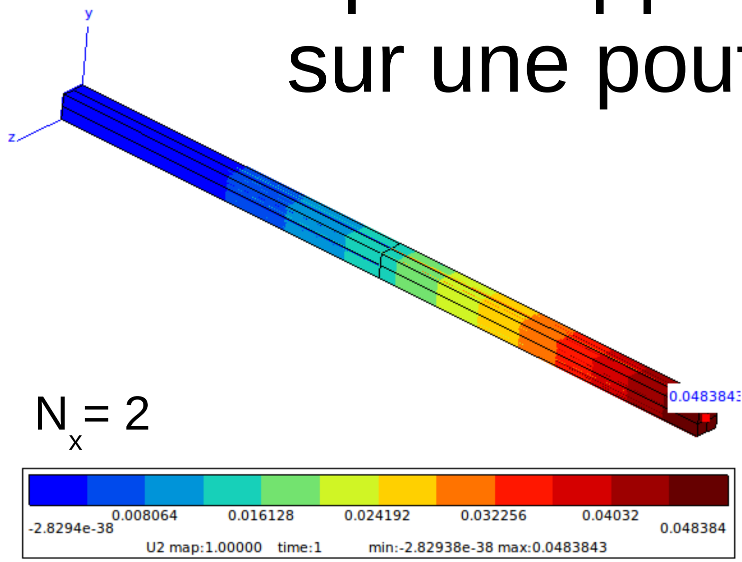
- **Chargement :**
  Force de 1N à l'une de ses extrémités

- **Condition limite :**
  Face encastrée à l'autre extrémité

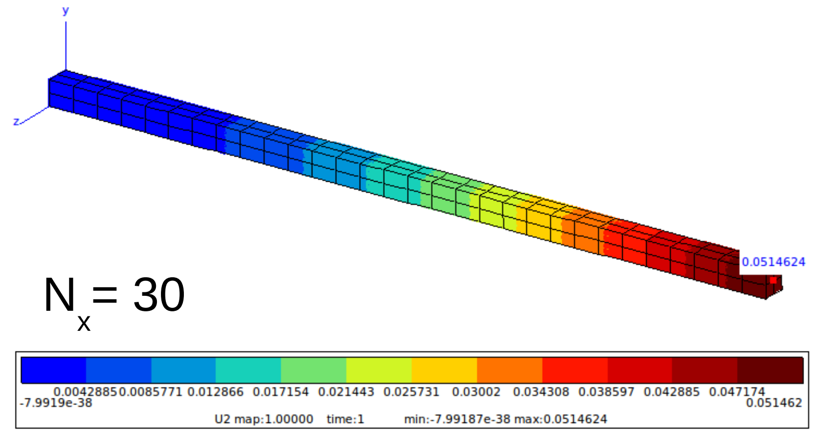
- **Résultat théorique :**
  $U_{max} = FL^3 \backslash (3E_{IZ}) = 5.14e^{-2}$ mm



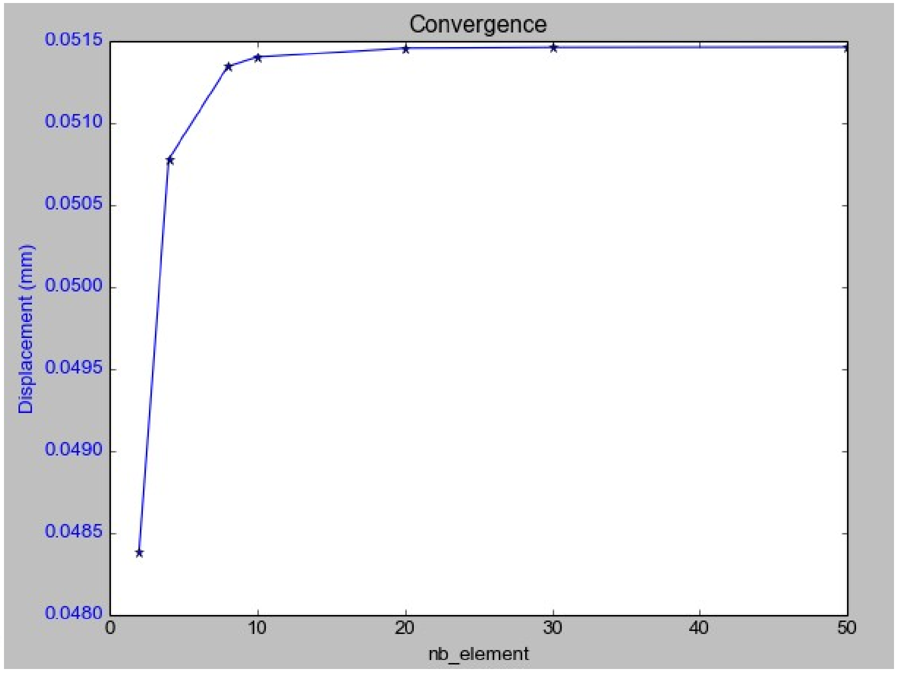
Exemple d'application de la MEF sur une poutre en flexion

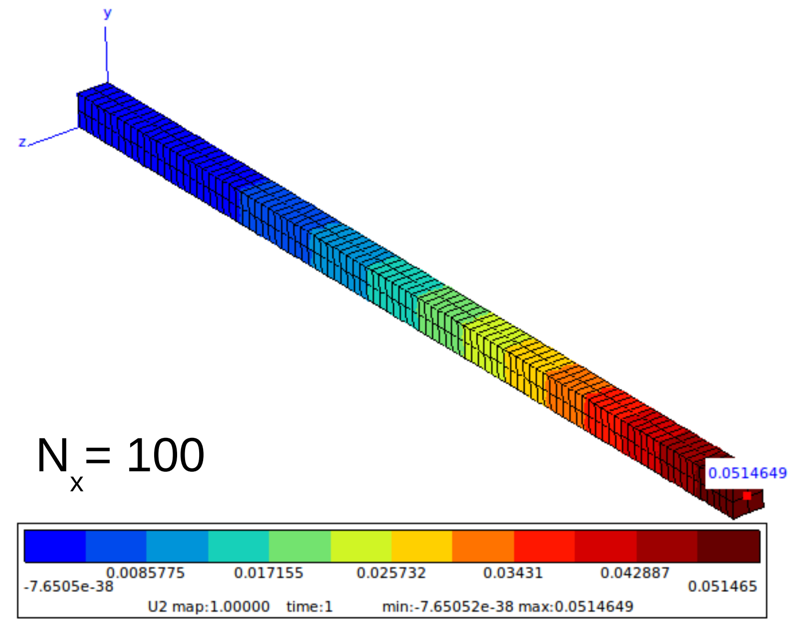


$N_x = 2$



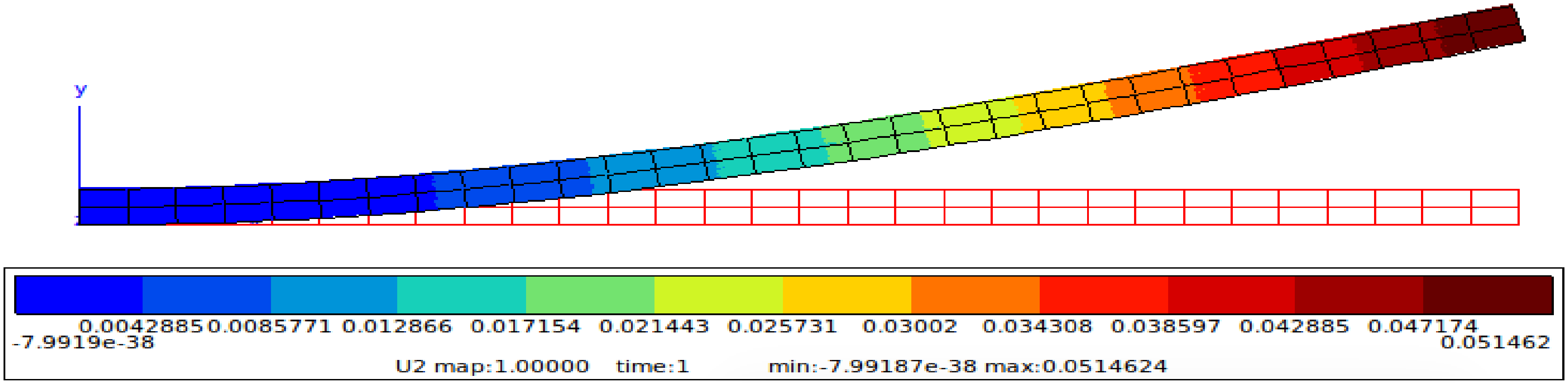
$N_x = 30$

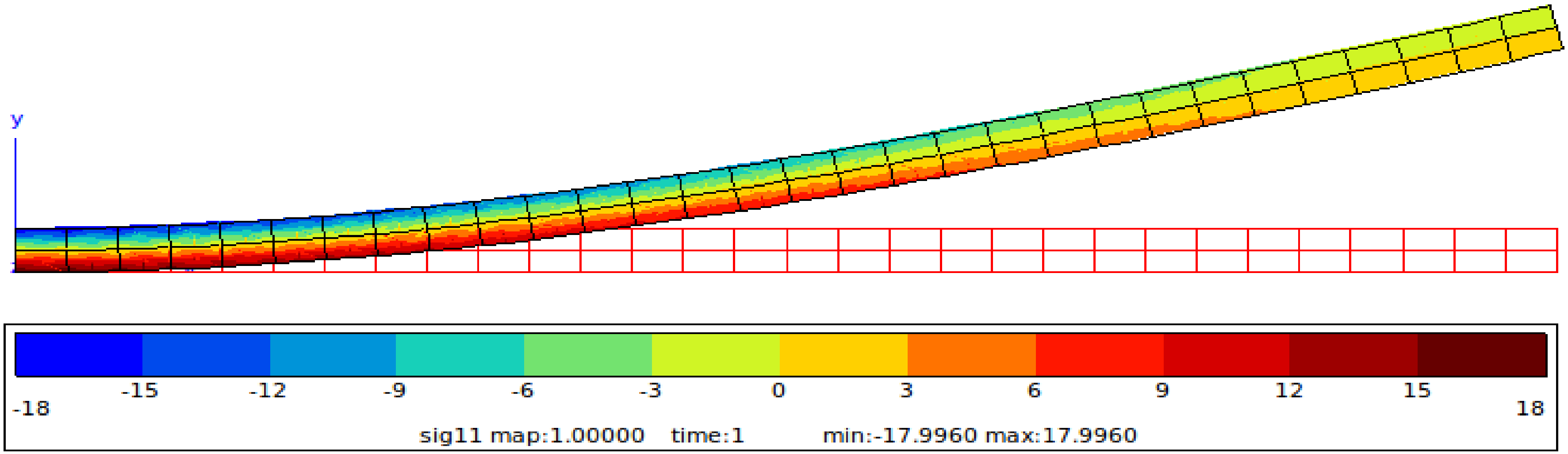




$N_x = 100$

Exemple d'application de la MEF sur une poutre en flexion





Constat

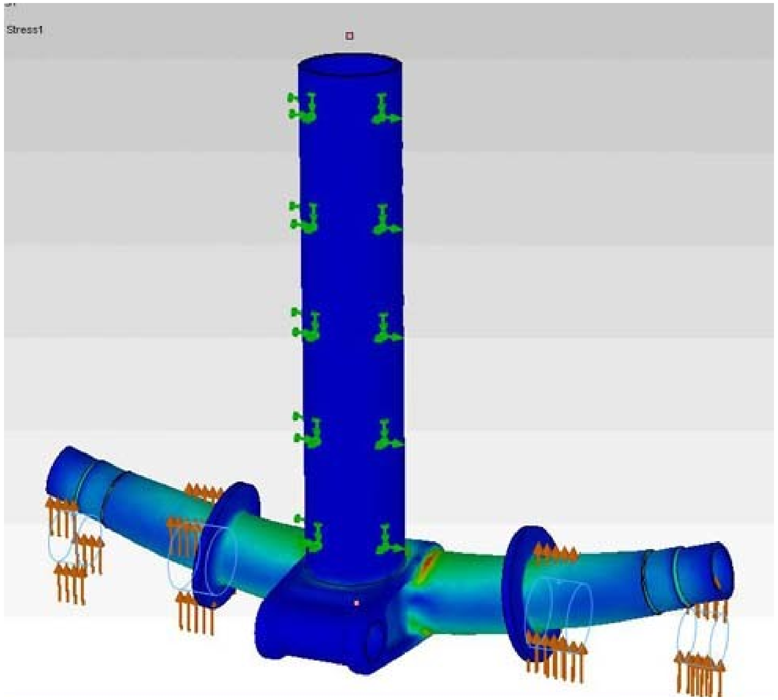
- Méthode convergente
  - Plus le nombre de noeuds augmente plus la solution est proche de la solution du problème continue

- Avoir un regard très critique sur les résultats de calculs !!!
  - Raffinement de maillage pas toujours possible car les coûts de calcul sont trop grands
  - Corrélations essais / calculs souvent nécessaires

Exemples d'applications de la MEF chez Safran Landing Systems

Dimensionnement de train d'atterissage

- Objectifs :
  - Connaître les efforts dans les composants
  - Connaître les déplacements



Dimensionnement de train d'atterissage

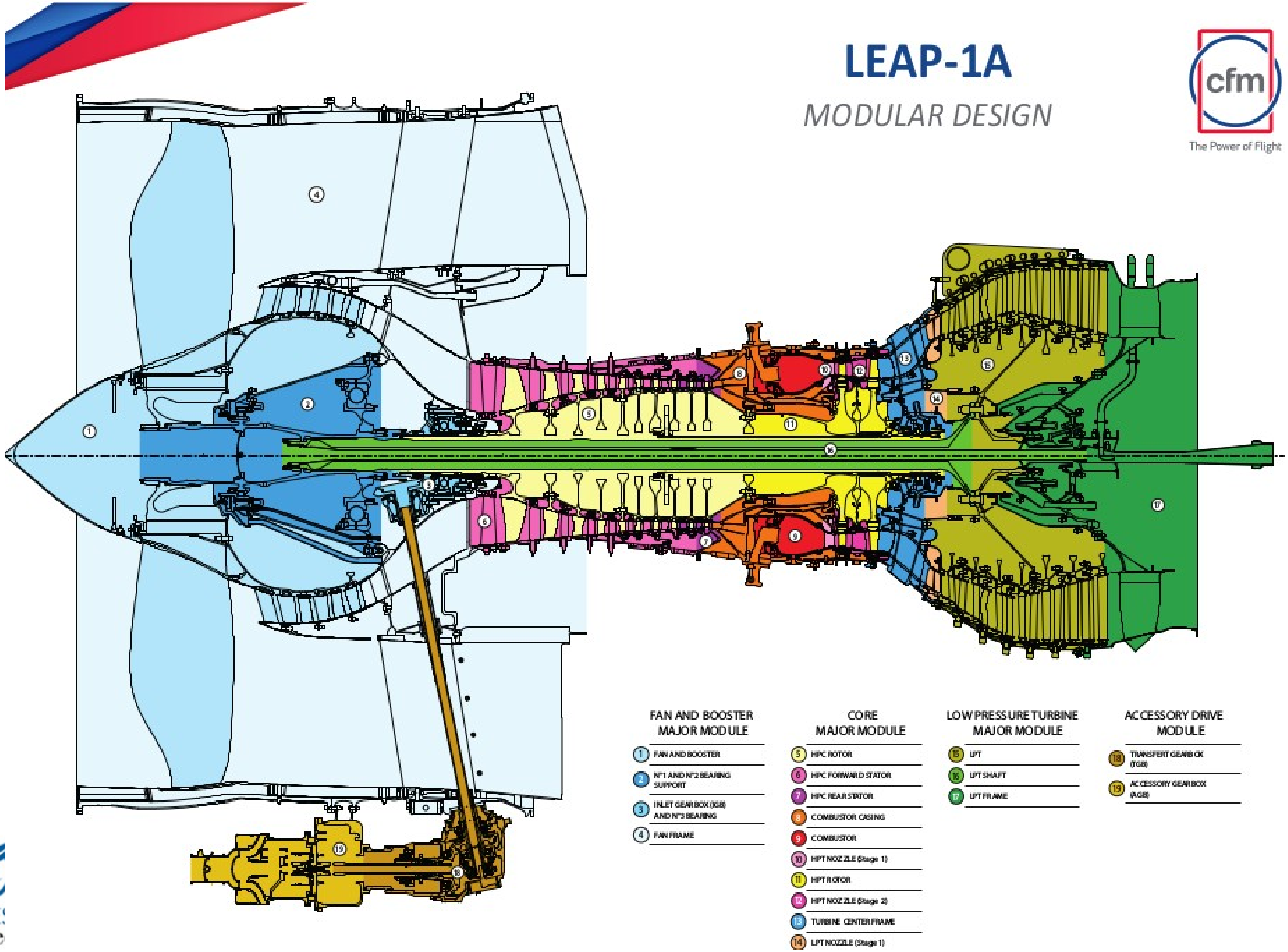
Dimensionnement de système de freinage

- Objectifs
  - Connaître la température vue par les différents composants
  - Connaître les efforts appliqués sur les composants

© Photo : Messier-Bugatti

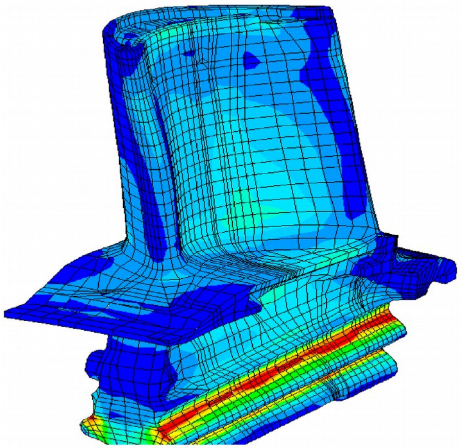
Exemples d'applications de la MEF chez Safran Aircraft Engines

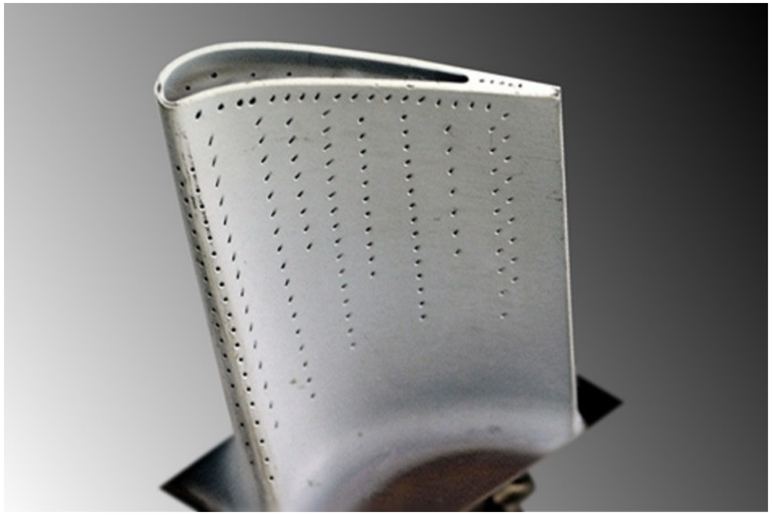
Exemples d'applications de la MEF chez Safran Aircraft Engines

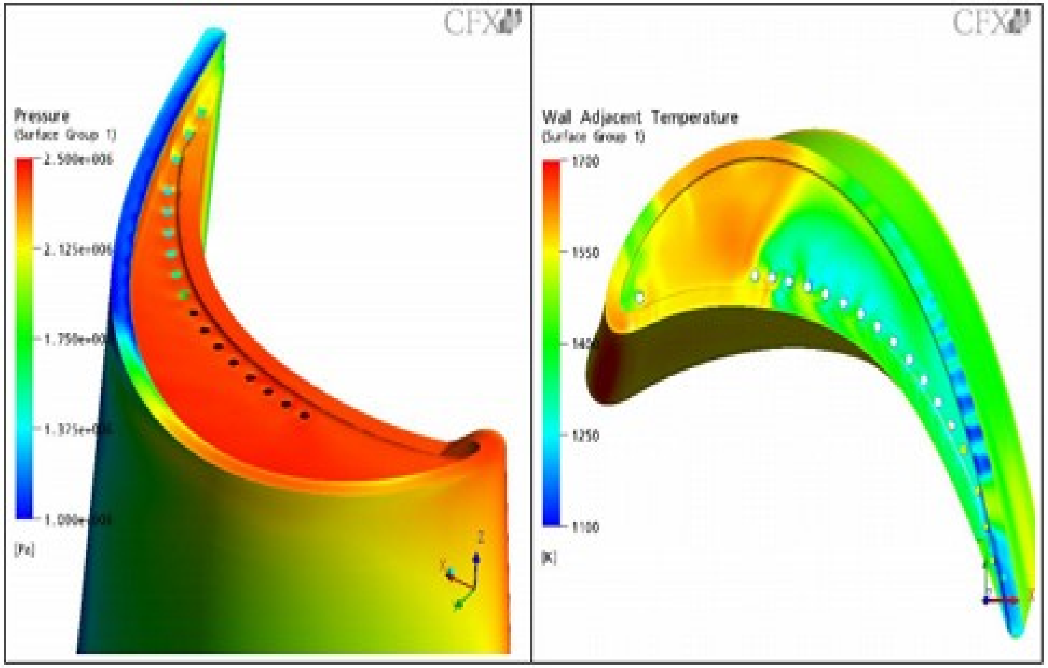


Dimensionnement d'aube de turbine

- Objectifs :
  - Connaître la température vue par les différents composants
  - Connaître les efforts vus par les composants

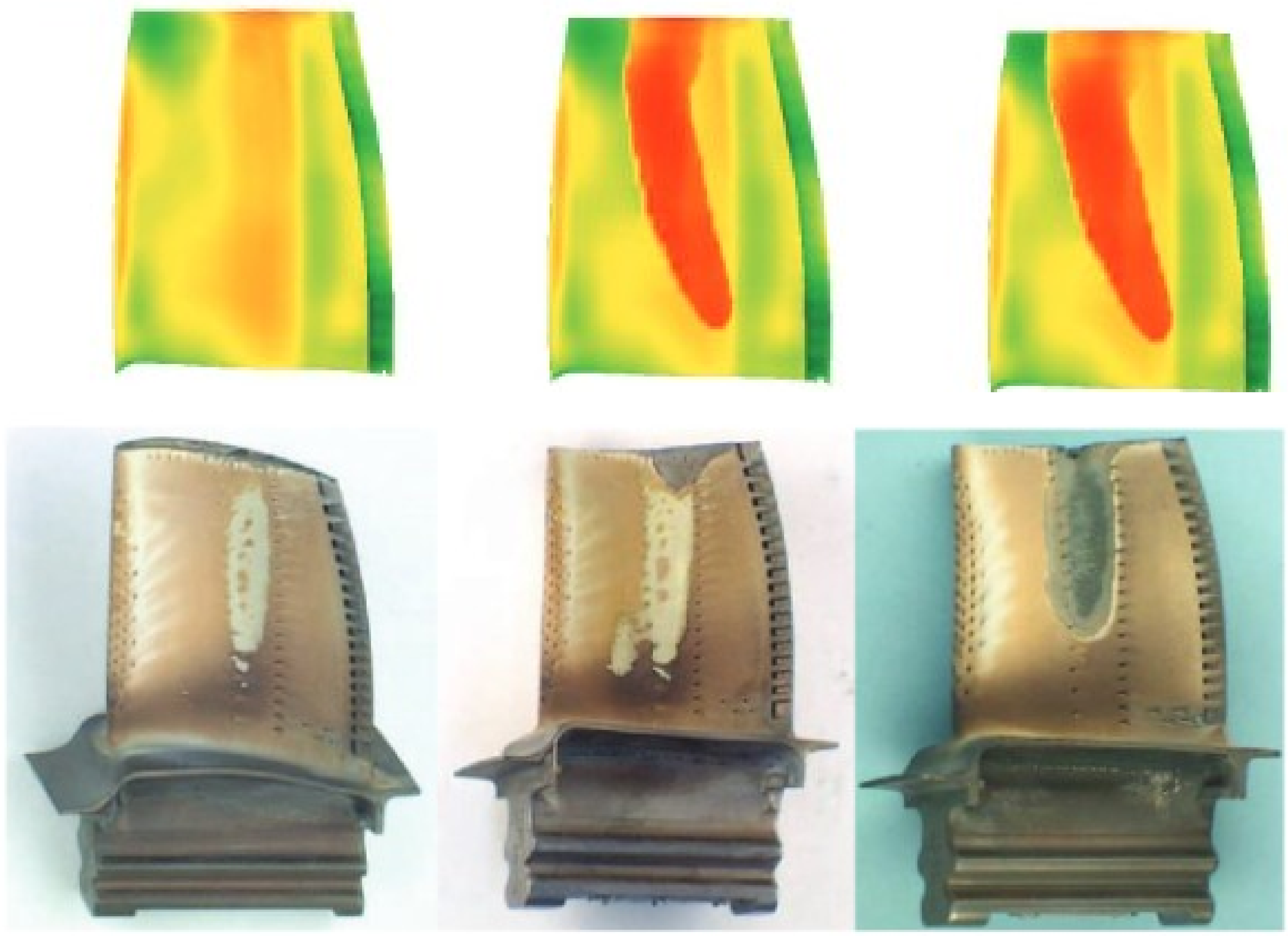






Dimensionnement d'aube de turbine

- Etude du vieillissement du composant



Dimensionnement d'aube de turbine

- Désaccordage

Variabilité géométrique (fabrication)

↓

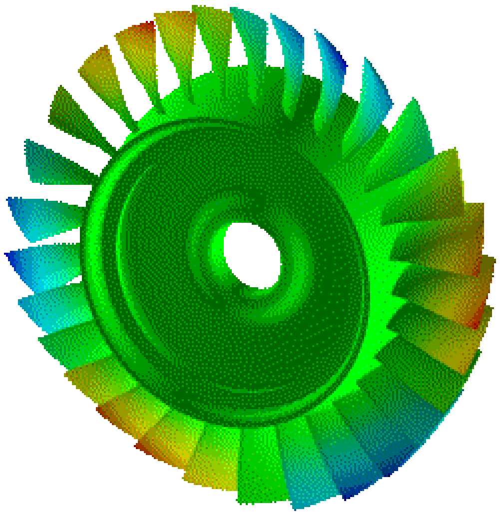
Analyses vibratoires

↓

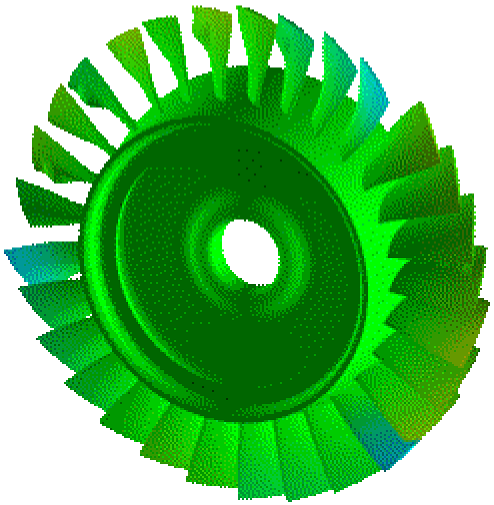
Facteurs d'amplifications

↓

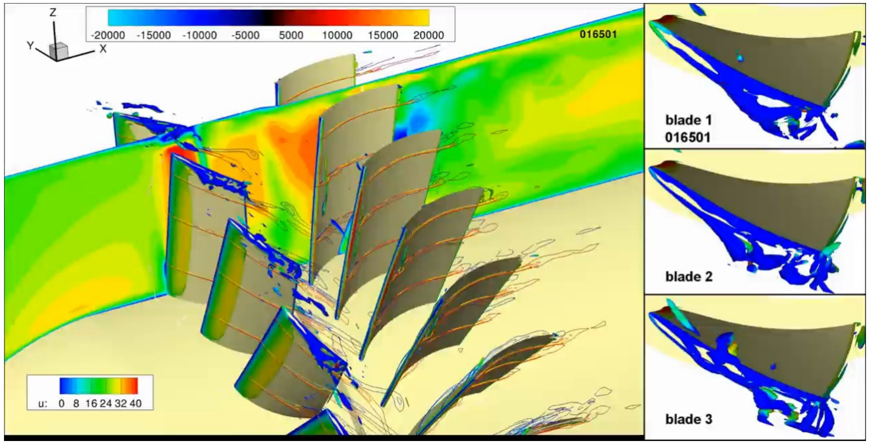
Dimensionnement



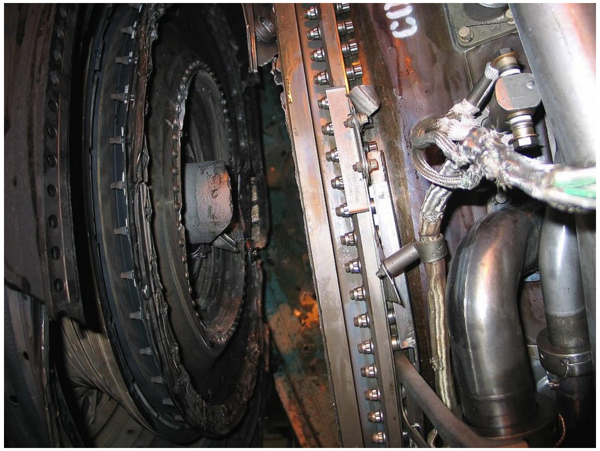
Accordée

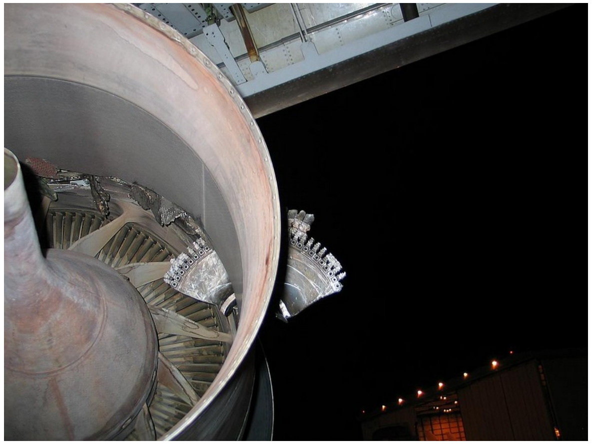


Désaccordée



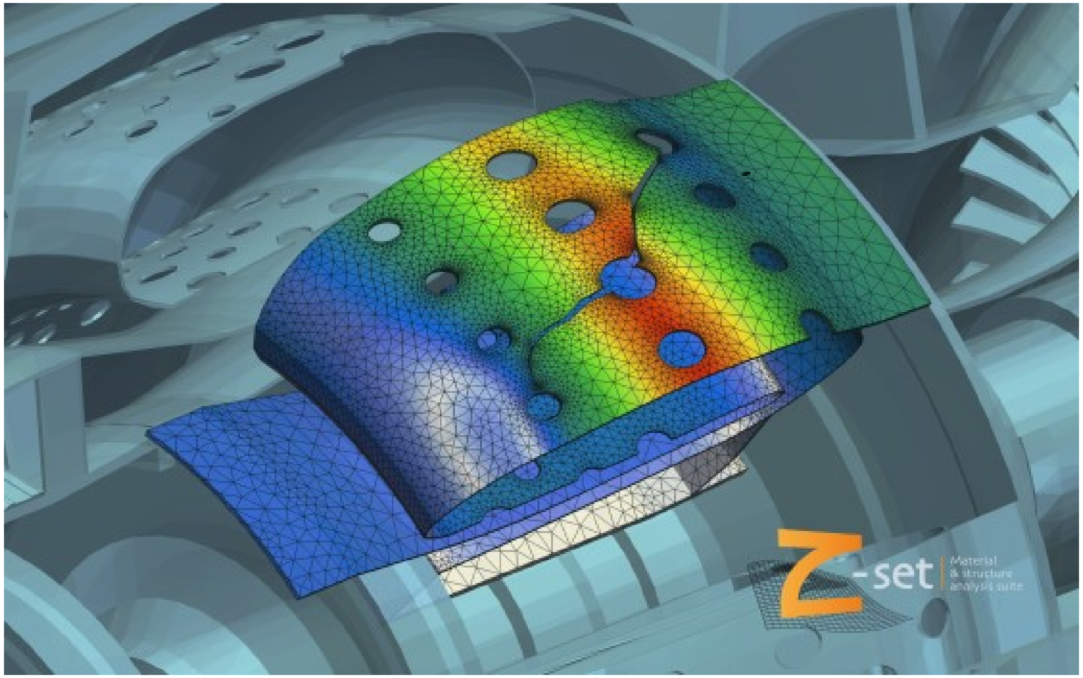
Tolérance aux dommages

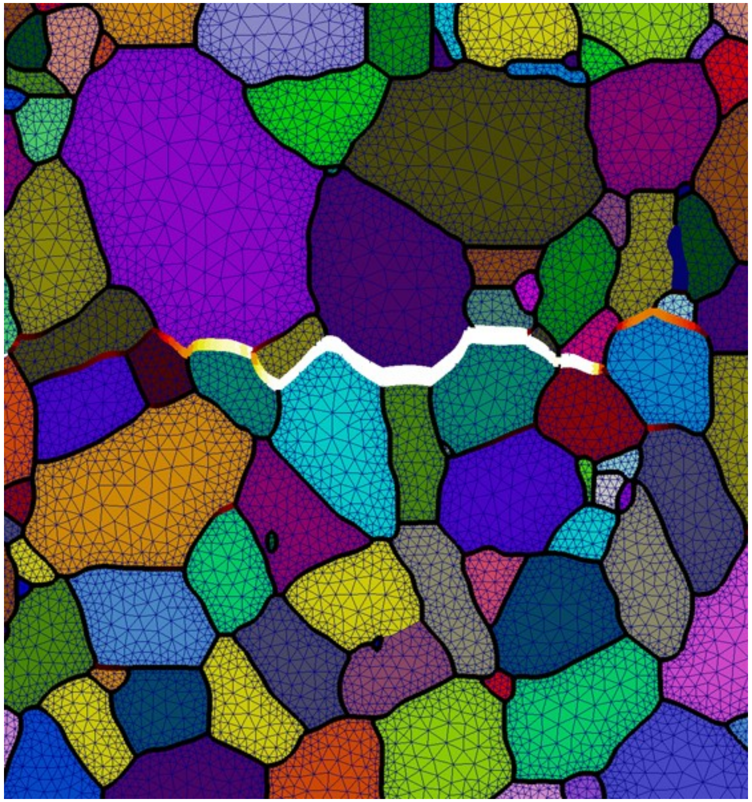





Tolérance aux dommages

- Objectifs :
  - Etude du vieillissement de composant
  - Déterminer les tailles de défaults acceptables





Ingestion d'oiseau(x) / ingestion de glace

- Objectifs :
  - Arriver confiant à l'essai de certification
  - Dimensionner les composants
  - Fan intègre
  - Poussée résiduelle assurée

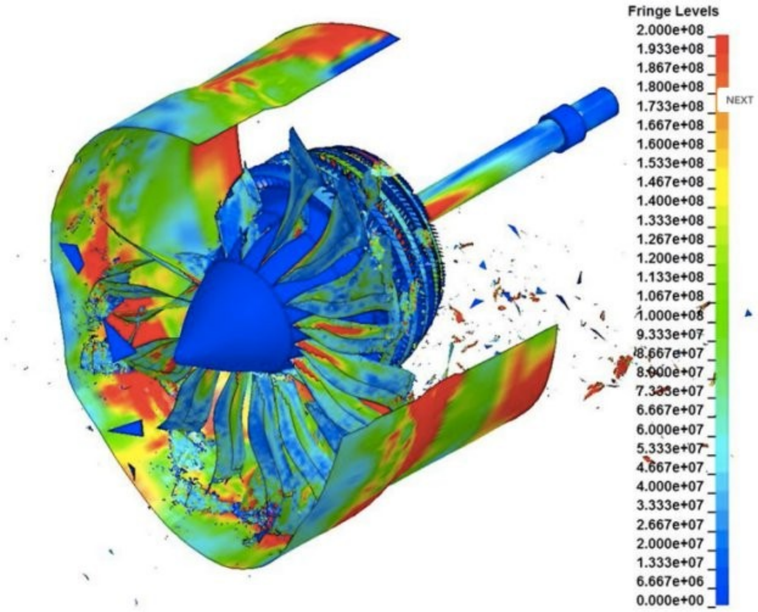

Trent 900

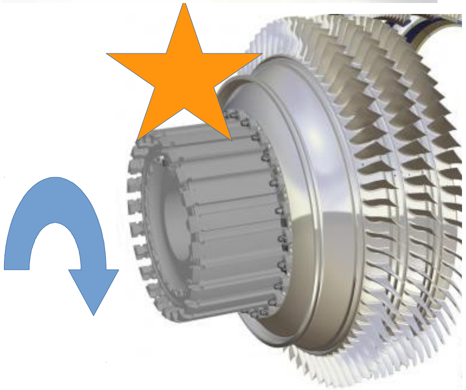
Essai de perte d'aube

- Objectifs :
  - Arriver confiant à l'essai de certification
  - Dimensionner les composants
  - Assurer la rétention des aubes

Carter fan

Aube fan



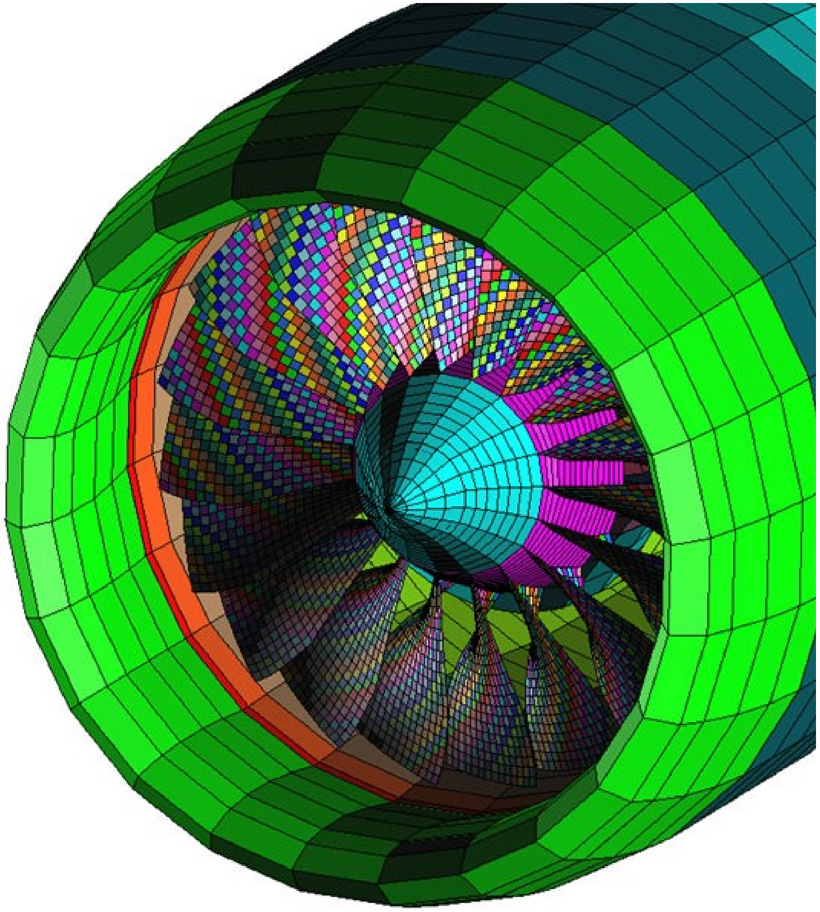


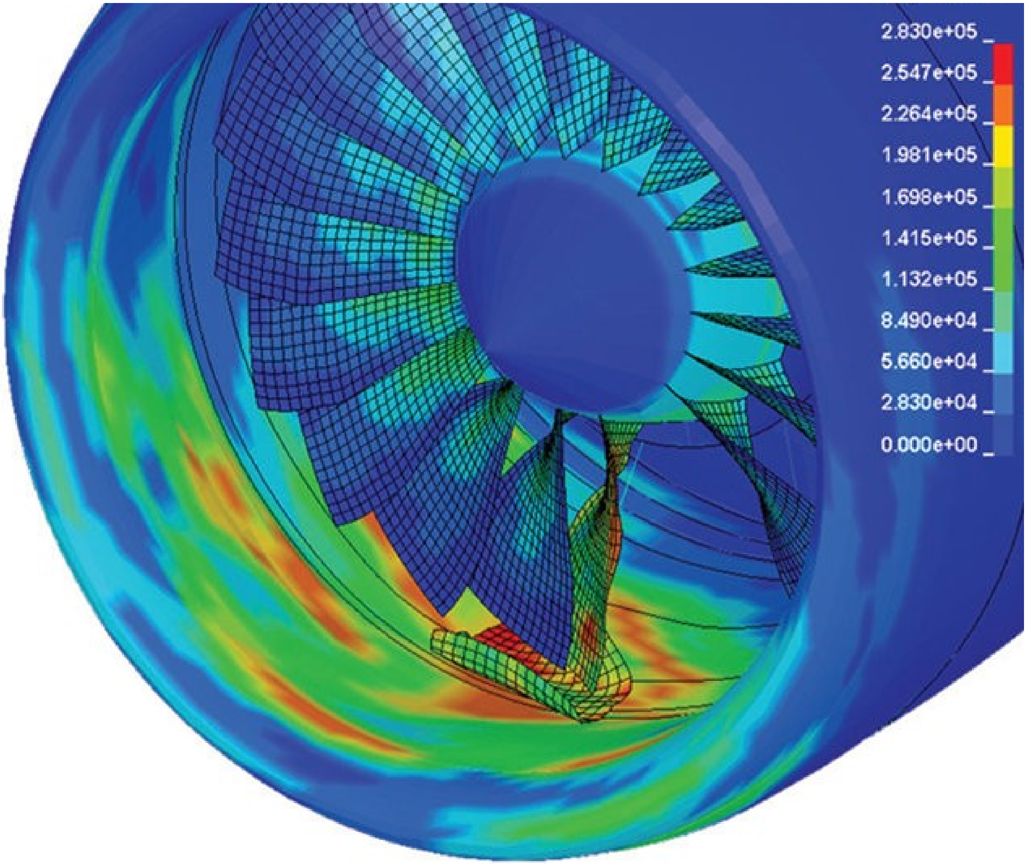
Booster


Discovery

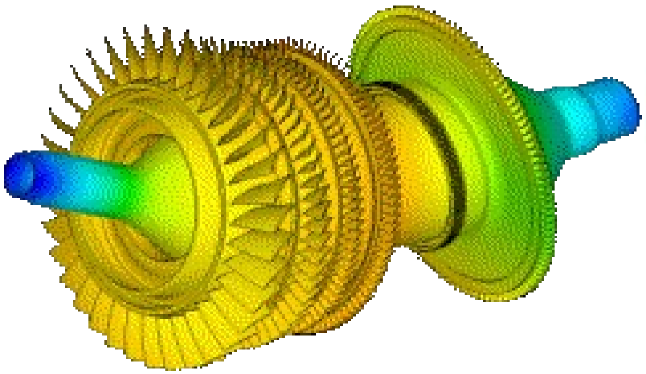
Essai de perte d'aube

- Calculs de perte d'aube



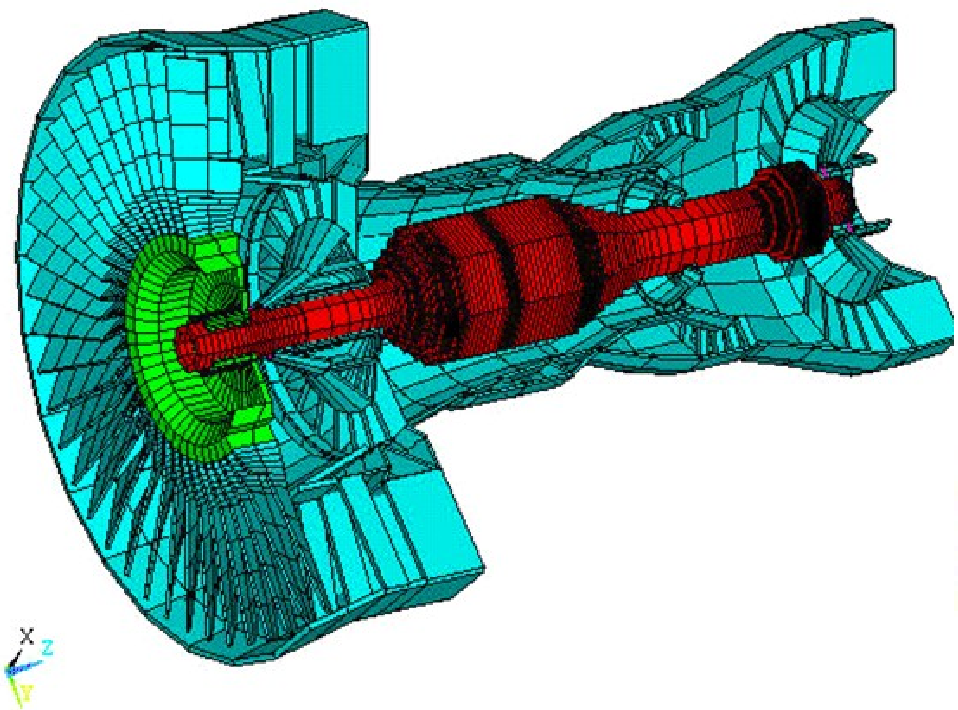


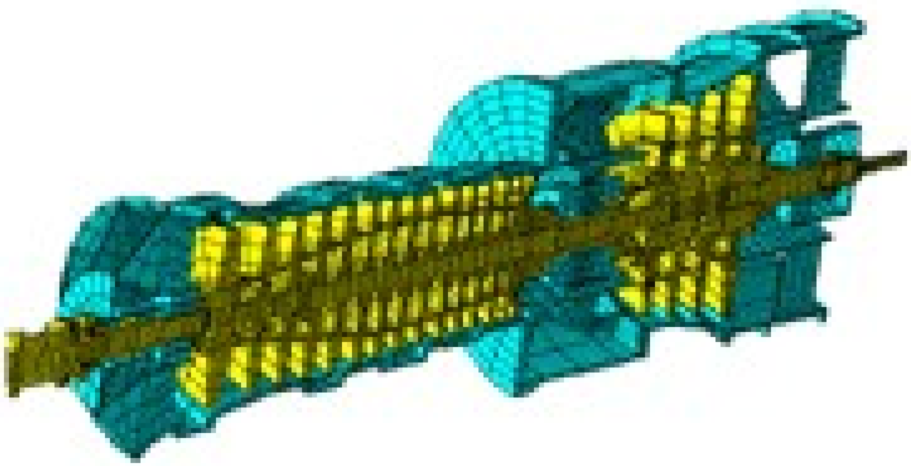
Modèle d'ensemble



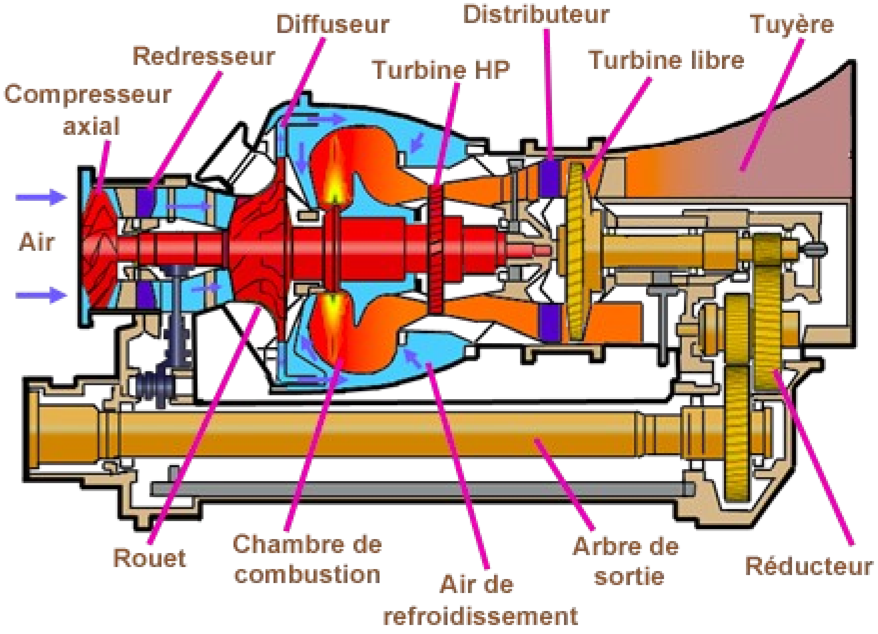
Objectifs :

- Prédire les déplacements d'ensemble
- Déterminer les fréquences et les modes propres





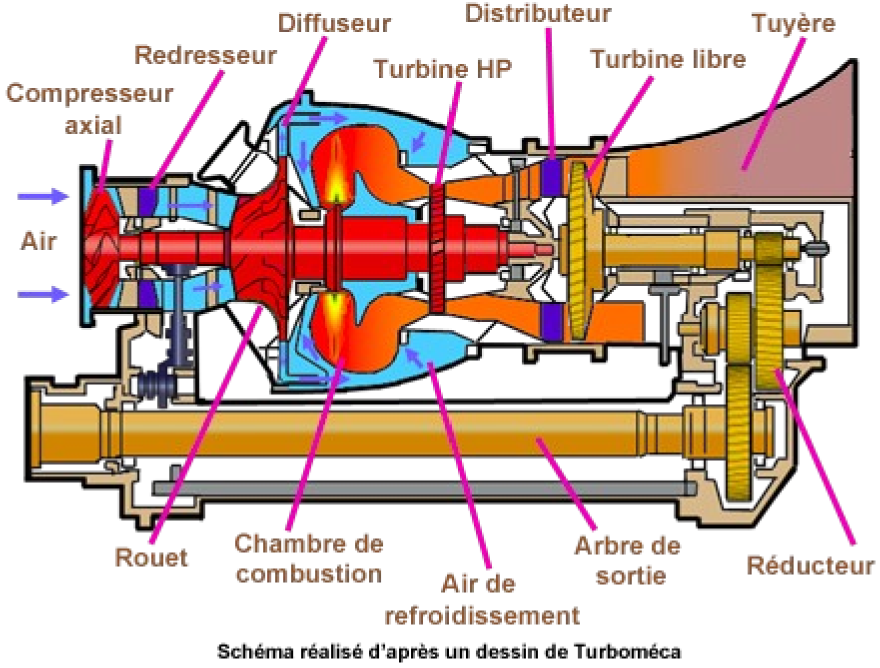
Exemples d'applications de la MEF chez Safran Helicopter Engines



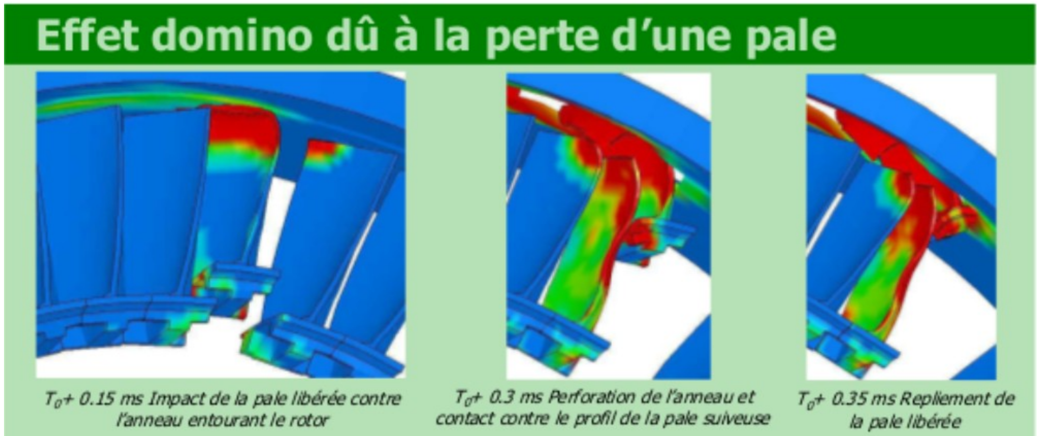
Protection contre la sur-vitesse

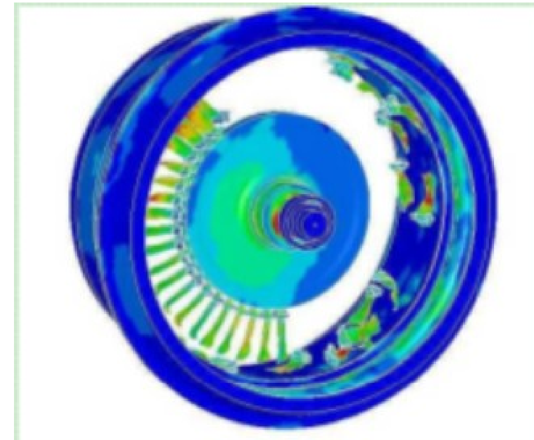
Besoin : Protection contre la sur-vitesse lors de la rupture d'un arbre.

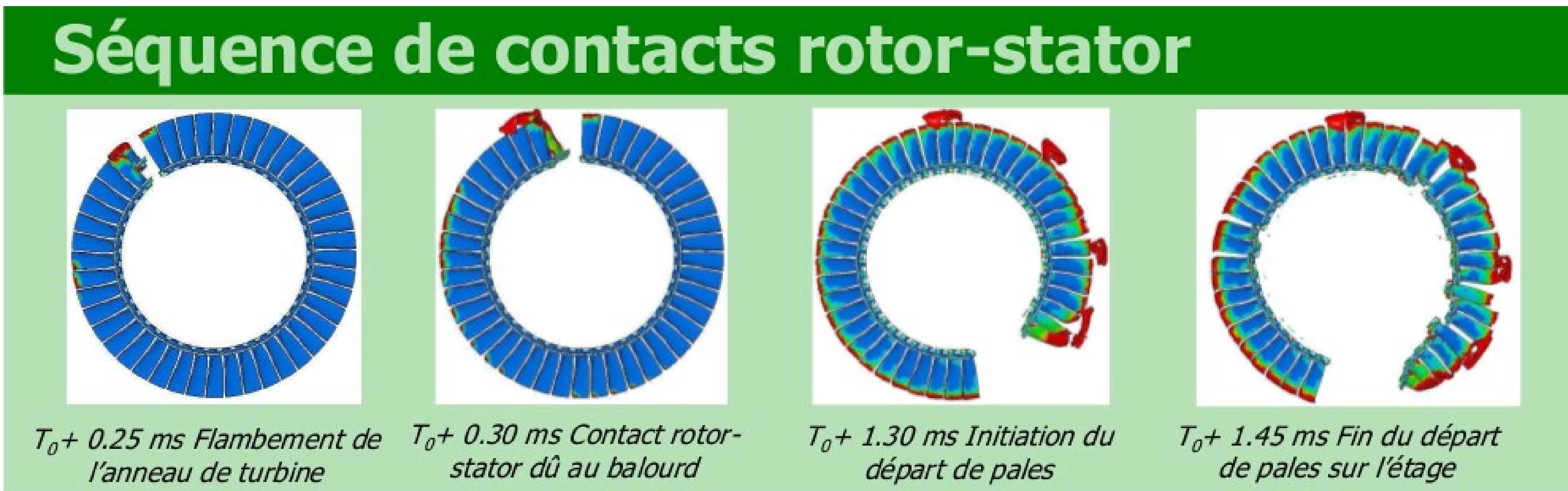
Technique : aube fusible + plumage du disque TUHP



Protection contre la sur-vitesse

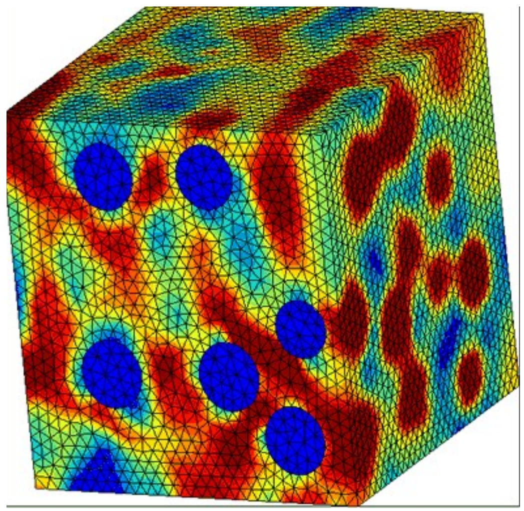


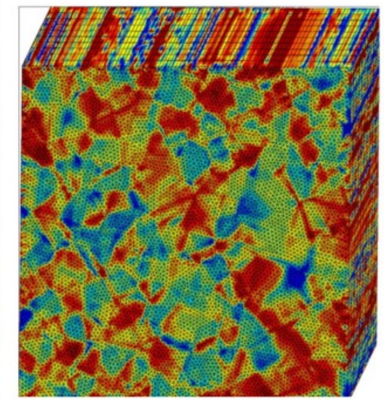


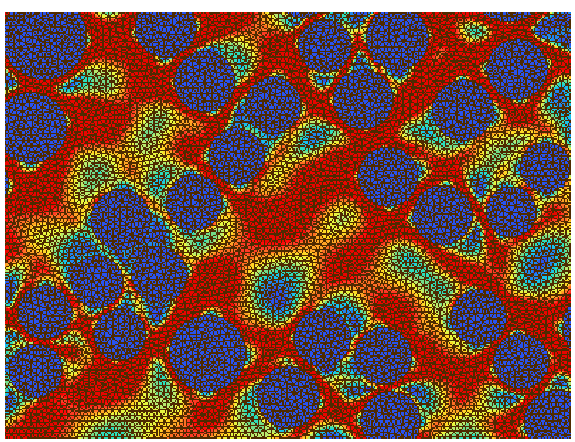


Modélisation des procédés de fabrication

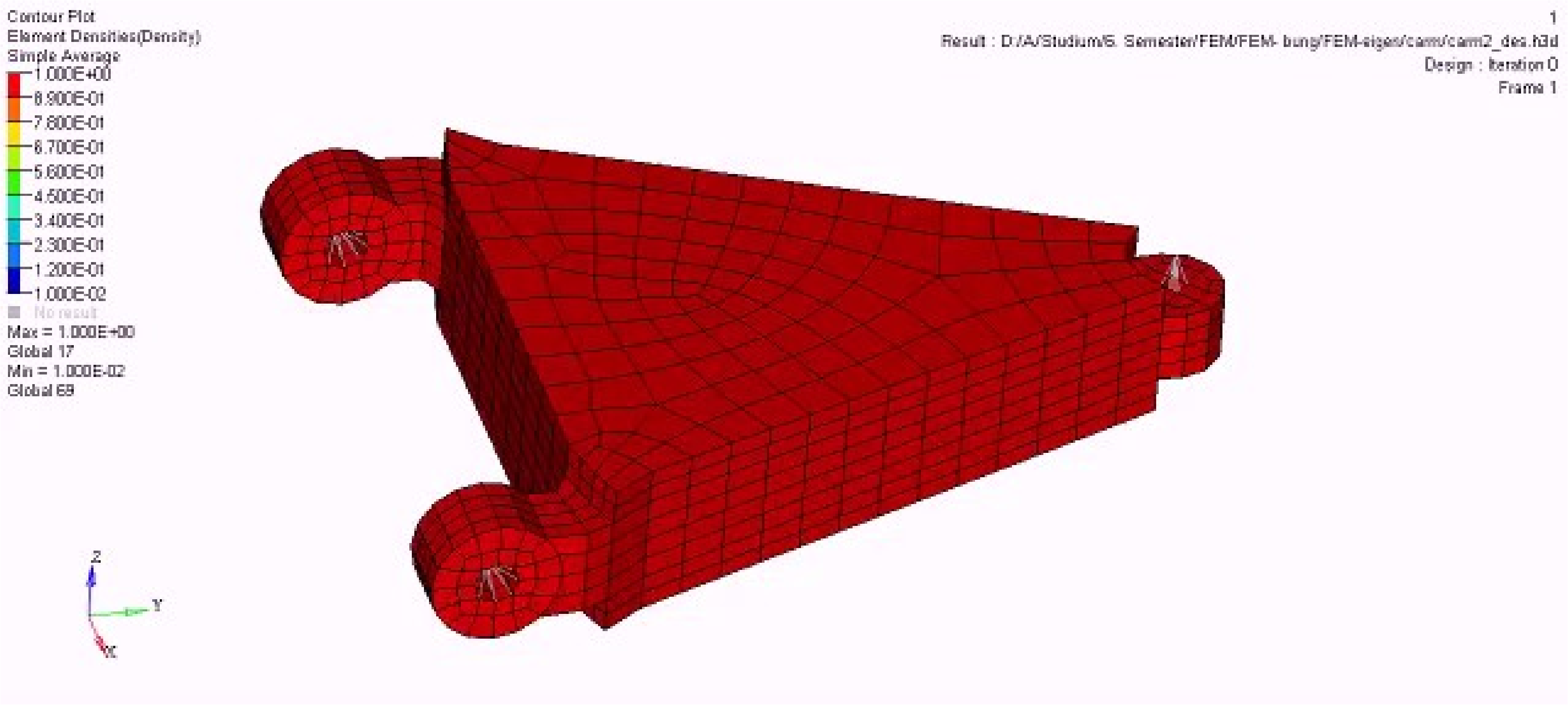
Modélisation des matériaux





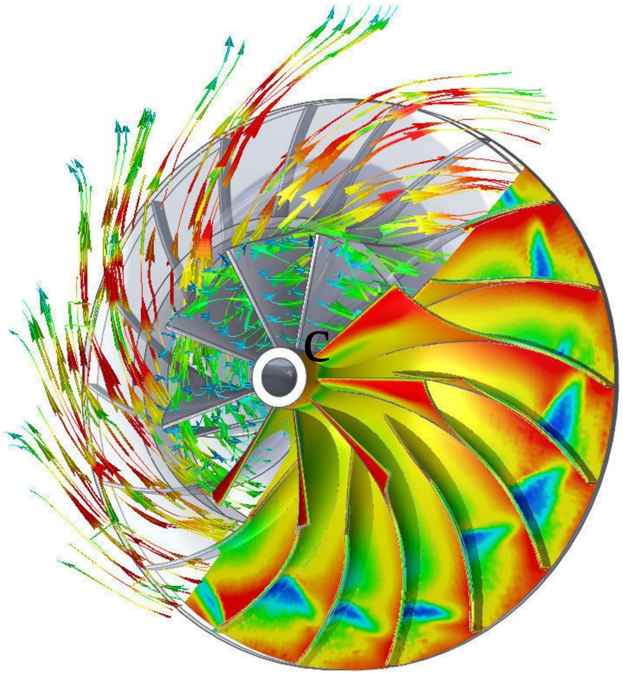


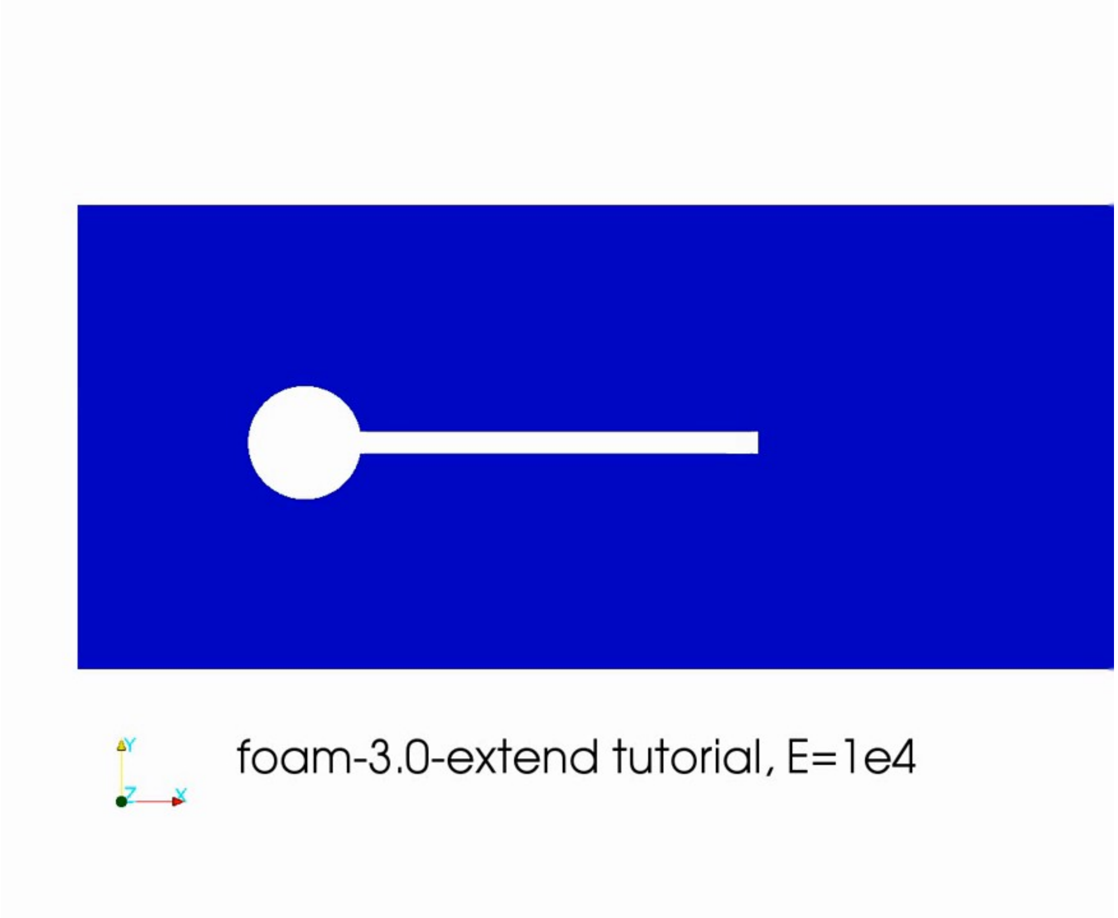
Optimisation topologique



Couplage des éléments finis avec d'autres codes

- Déterminer les conditions limites





Conclusion

La MEF est essentielle pour l'ingénierie!!!

?