ENSMP 2ème/3ème année, Cours d'éléments finis

Chauffage d'une pièce d'habitation

Un radiateur chauffe une pièce d'habitation, supposée remplie d'air. Le radiateur est maintenu à 50°C, une fenêtre en verre située à l'autre extrémité de la pièce est à une température de −2°C, et nous envisagerons différentes hypothèses en ce qui concerne les murs de la pièce.

Nous verrons que les conditions aux limites imposées le long des murs ont un effet important sur la répartition de température à l'intérieur de la pièce.

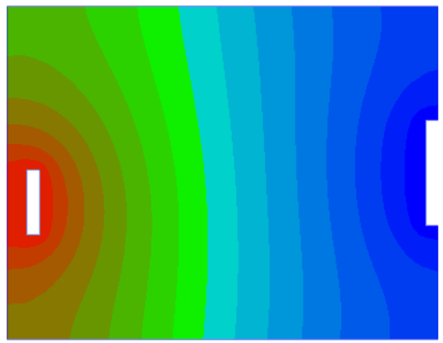
L'image ci-contre montre la répartition de la chaleur dans le cas où les murs sont isolés. On obtient dans ce cas une répartition satisfaisante de la chaleur dans toute la pièce.

Mais il s'agit là du régime permanent, et on peut se demander à quelle vitesse ce régime est atteint. Pour cela, nous devons également examiner l'évolution de la température dans la pièce. Il faut alors résoudre un problème de conditions initiales.

Dans ce mini-projet, on se propose de répondre à la question : au bout de combien de temps fera-t-il 19°C *au centre de la pièce ?*

Code utilisé : *FreeFem++*

Mots-clés : *Équation de la chaleur, évolution, différence finies, méthode dichotomie*



Présentation

Nous noterons Ω l'ouvert représentant la pièce, $\partial\Omega_1$ l'ensemble des murs, $\partial\Omega_2$ le bord de la fenêtre, et $\partial\Omega_3$ le bord du radiateur.

Géométrie

La longueur de la pièce est $L = 3.3$m, sa largeur $H = 2.55$m. La fenêtre, d'une longueur $l_f = 0.81$m, est rentrée de 0.1m dans la pièce. Le radiateur est un rectangle de 0.5m sur 0.1m. Son point en bas à gauche est à 0.15m du bord gauche et à 0.8m du bord bas.

On prendra également $k = 0.25\mathrm{W}/(\mathrm{m}^2\mathrm{K})$.

Le problème stationnaire

La température est solution de l'équation de Laplace dans la pièce

$$-k\Delta T = 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{1}$$

Nous envisageons 3 cas pour les conditions aux limites :

1. **Bord de la fenêtre** Température imposée $T = -2°\mathrm{C}$;

   Mur Flux de chaleur imposée $k\nabla T \cdot n = -0.31\mathrm{W}/\mathrm{m}^3$;

   Radiateur Température imposée $T = 50°\mathrm{C}$.
2. **Bord de la fenêtre** Température imposée $T = -2°\mathrm{C}$;

   Mur Température imposée $T = -2°\mathrm{C}$;

   Radiateur Condition de Fourier $k\nabla T \cdot n + h(T - T_f) = 0$, avec $h = 1\mathrm{W}/(\mathrm{m}°\mathrm{C})$ et $T_f = 50°\mathrm{C}$.
3. **Bord de la fenêtre** Température imposée $T = -2°\mathrm{C}$;

   Mur Condition de Fourier $k\nabla T \cdot n + h(T - T_f) = 0$, avec $h = 1\mathrm{W}/(\mathrm{m}°\mathrm{C})$ et $T_f = -2°\mathrm{C}$.

   Radiateur Température imposée $T = 50°\mathrm{C}$.

Le problème transitoire

Dans ce cas, la température est solution de l'équation de la chaleur dans la pièce

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - k\Delta T = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{2}$$

où ρ est la densité C_p est la chaleur spécifique de la pièce (on prendra $\rho = 1,2\,\mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$ et $C_p = 1000\,\mathrm{J}/\mathrm{kgK}$.

En ce qui concerne les conditions aux limites, on se placera dans le cas 1 du paragraphe précédent.

La discrétisation en temps sera effectuée par différences finies, en utilisant le schéma d'Euler rétrograde. Le schéma semi-discrétisé en temps s'écrit :

$$\rho C_p \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - k\Delta u^{n+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{3}$$

avec les conditions aux limites imposées sur u^{n+1}.

Travail proposé

Le problème stationnaire

Pour chacun des cas de conditions aux limites du paragraphe précédent, écrire la formulation variationnelle du problème obtenu.

Résoudre numériquement les problèmes correspondants.

Observer l'influence des conditions aux limites sur l'allure de la solution.

Le problème transitoire

Écrire la formulation variationnelle du problème semi–discrétisé.

Résoudre le problème correspondant. On arrêtera l'intégration quand le régime permanent est « établi ». Expérimenter avec le choix du pas de temps pour atteindre une bonne précision.

Nous précisons la question posée plus haut : on considère un disque de rayon 0.2 autour du point $(L/2, H/2)$. On veut savoir à quel instant la température moyenne dans ce disque dépasse $T_c = 19°C$.

Pour cela, trouver graphiquement un encadrement de la valeur cherchée, puis résoudre l'équation $T_m(t) = T_c$ par dichotomie :

On définit trois suites $t^n_{\min}$, $t^{\max}_n$ et t^n de la façon suivante (l'encadrement précédent aura fourni $t^0_{\min}$ et $t^0_{\max}$).

– Poser $t^n = (t^n_{\min} + t^n_{\max})/2$ et calculer la température $T_m(t^n)$.
– Si $T_m(t^n) \leq T_c$, poser $t^{n+1}_{\min} = t^n$, $t^{n+1}_{\max} = t_{\max}$;
– Sinon poser $t^{n+1}_{\max} = t^n$, $t^{n+1}_{\min} = t_{\min}$.

Avec quelle précision pensez-vous pouvoir calculer l'instant cherché ?

Bonus

– Étudier l'influence du coefficient de conductivité k sur le régime asymptotique et sur le temps mis pour atteindre les 19 °C.
– Reprendre les questions précédentes avec le schéma de Crank-Nicolson :

$$\rho C_p \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - k\frac{1}{2}\left(\Delta u^{n+1} + \Delta u^n\right) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{4}$$

Annexe

Nous donnons un exemple pour montrer comment calculer l'intégrale d'une fonction sur une partie du domaine.

```
real x0=0, y0=0, r=0.2;
int n=120;

border a(t=-1, 1) {x=t; y=-1;}
border b(t=-1, 1) {x=1; y=t;}
border c(t=1, -1) {x=t; y=1;}
border d(t=1, -1) {x=-1; y=t;}
border cerc(t=0, 2*pi) {x=x0+r*cos(t); y=y0+r*sin(t);}
mesh th = buildmesh(a(n)+b(n)+c(n)+d(n)+cerc(n));
plot(th, wait=1);

func f=x^2*y^2;
fespace Vh(th, P1);
Vh u=f;

fespace Ph(th, P0);
Ph reg=region;
int inside=reg(x0, y0);
cout << "inside=" << inside<< endl;

cout << "Integrale= " << int2d(th)((region==inside)*u) << endl;
```

On trouve `Integrale= 8.40797e-06`, alors que Maple donne $0.838\,10^{-5}$