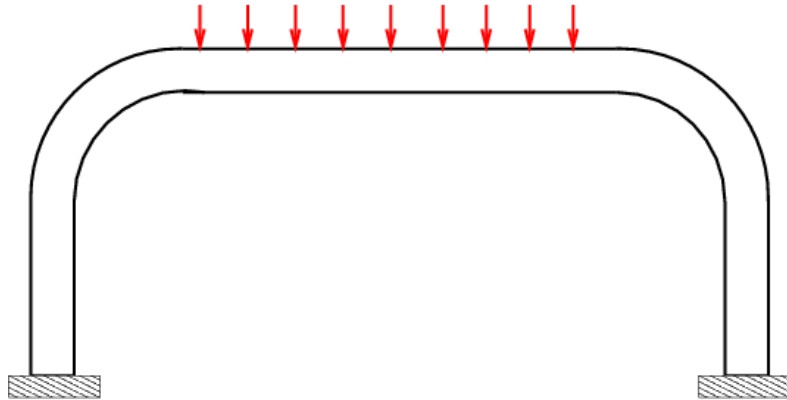


## Optimisation de l'épaisseur d'une structure tridimensionnelle



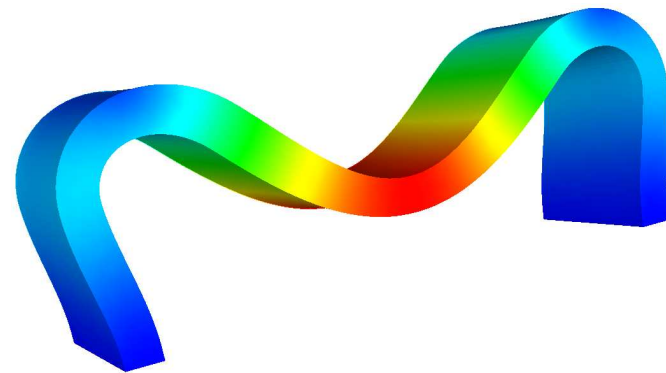
On cherche à calculer l'épaisseur d'un pont, sous un chargement donné, de façon à ce que le déplacement maximal ne dépasse pas une valeur fixée.

La structure est fixée aux deux extrémités inférieures, et un chargement uniforme est appliqué sur la partie horizontale supérieure.

*Dans ce mini-projet, on se propose de chercher la valeur minimale de l'épaisseur qui donne un déplacement au centre de la structure ne dépassant pas un critère fixé à l'avance. On utilisera pour cela une méthode de dichotomie : on maintient un encadrement de l'épaisseur, et on met à jour cet encadrement pour s'approcher du déplacement cherché.*

Code utilisé : *FreeFem++*

Mots-clés : *élasticité, déplacements plans, méthode dichotomie, précision d'un calcul*



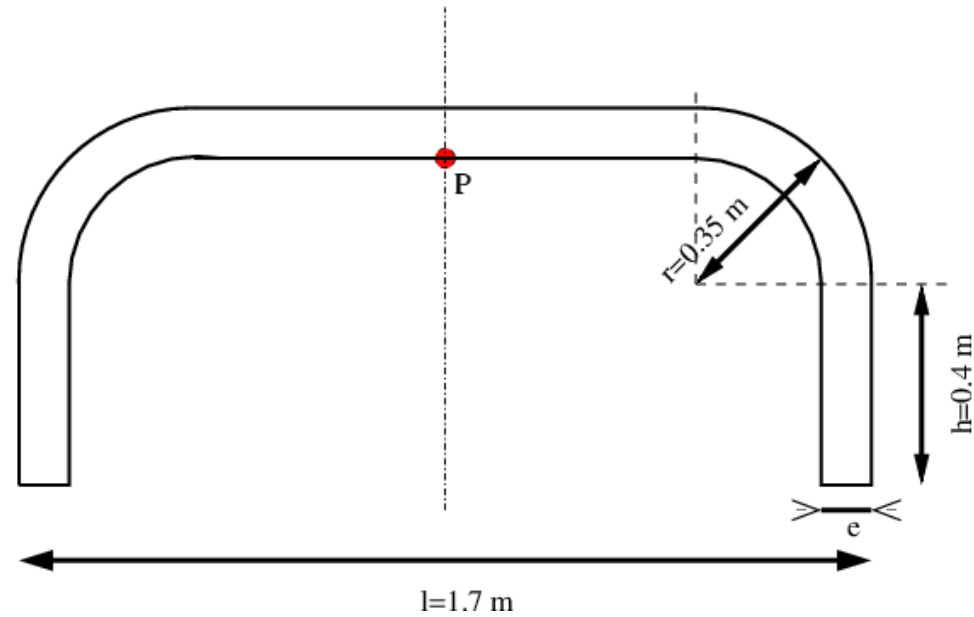


FIGURE 1 – Géométrie de la structure

## Présentation

### Description du problème

La structure considérée est tridimensionnelle. La géométrie d'une coupe verticale est présentée sur la figure 1. L'épaisseur de la pièce est  $p = 0.5\text{m}$ .

On supposera que la structure est homogène, ses caractéristiques physiques sont les suivantes :

**Module d'Young**  $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$

**Coefficient de Poisson**  $\nu = 0.3$

**Masse volumique**  $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$

La force imposée sur le bord supérieur est  $f = -5 \cdot 10^8 \text{ N m}^{-2}$ .

## Travail proposé

### Formulation

Établir *soigneusement* la formulation variationnelle de ce problème. Préciser en particulier le traitement des conditions aux limites.

### Résolution à $e$ fixé

Dans ce paragraphe seulement, on fixe  $e = 0.1\text{m}$ . Écrire un programme utilisant le langage FreeFem++ pour résoudre ce problème.

On commencera par mailler la coupe verticale 2D de la figure 1 en considérant qu'elle se situe dans le plan  $xy$ , et on utilisera la fonction `buildlayers` de FreeFem++ pour obtenir le maillage 3D (penser à faire tourner la structure pour la remettre dans son orientation naturelle).

Étudier la précision du résultat en faisant varier le maillage, et en utilisant l'option d'adaptation de FreeFem++.

Comparer les solutions calculées sur la moitié de la structure et sur la structure entière.

## Optimisation de l'épaisseur

On veut maintenant chercher l'épaisseur minimale du pont pour que le déplacement vertical au point situé au milieu de la face inférieure (noté  $P$  sur la figure 1) soit inférieur (en valeur absolue) à  $d_0 = 10\text{cm}$ . Pour cela, on suggère de procéder comme suit :

## Approximation graphique

Commencer par chercher un encadrement de l'épaisseur cherchée  $]e_{\min}^0, e_{\max}^0[$ . Procéder graphiquement, en traçant la fonction  $e \rightarrow d$  sur un intervalle approprié.

Examiner comment varie le déplacement en fonction de l'épaisseur.

## Raffinement de la solution

On définit ensuite trois suites  $e_{\min}^n, e_{\max}^n$  et  $e^n$  de la façon suivante (méthode de dichotomie) :

- Poser  $e^{n+1} = (e_{\min}^n + e_{\max}^n)/2$  et calculer le déplacement  $d^n$  correspondant.
- Si  $|d^n| \leq |d_0|$ , poser  $e_{\max}^{n+1} = e^n, e_{\min}^{n+1} = e_{\min}^n$  ;
- Sinon poser  $e_{\min}^{n+1} = e^n, e_{\max}^{n+1} = e_{\max}^n$ .

On considère que le bord extérieur est fixe, c'est le bord intérieur qui change à chaque itération. Noter que l'on doit recalculer le maillage à chaque itération.

Écrire le programme correspondant.