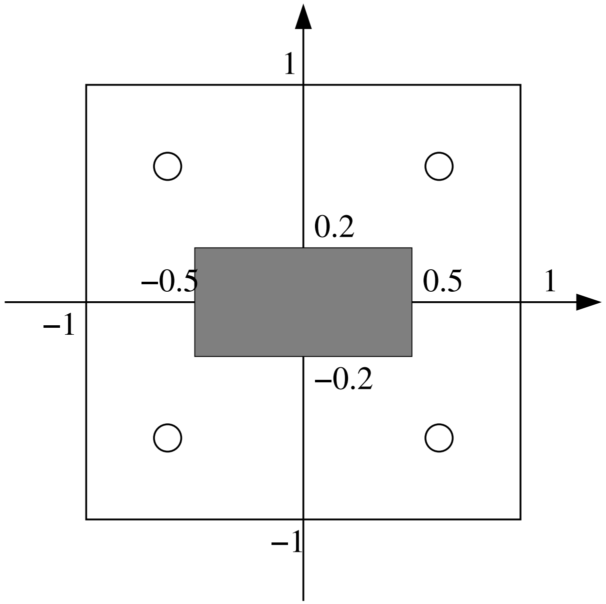
ENSMP 2ème/3ème année, ES éléments finis, novembre 2017

Optimisation du chauffage d'un four



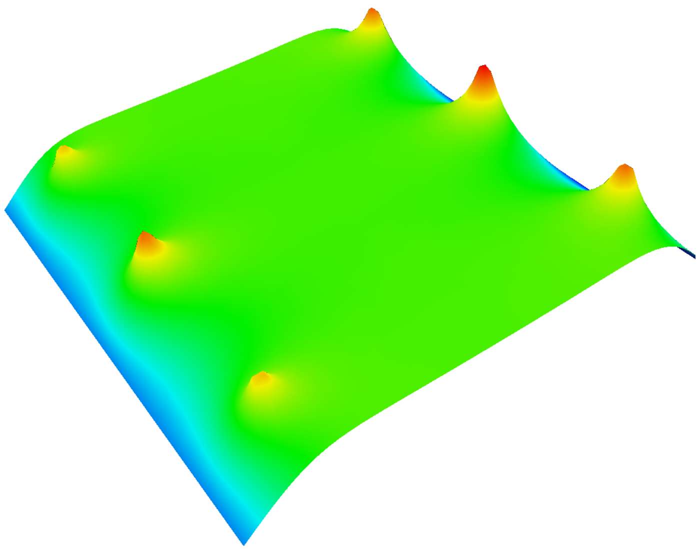
On considère un four de forme rectangulaire, comportant des résistances. On se propose de chercher les valeurs à donner aux résistances de sorte que la température dans une partie du four soit proche d'une valeur fixée à l'avance.

Pour chaque valeur des résistances, on peut calculer la température obtenue dans le four.

Dans ce mini-projet, on se propose de chercher les valeurs à donner aux résistances pour obtenir une température uniforme, et proche d'une valeur fixée, autour de la pièce à chauffer. Pour cela, on exprime la température comme une combinaison linéaire des températures obtenues lorsque seule l'une des résistances est active, et l'on calcule les coefficients de la combinaison linéaire.

Code utilisé : *FreeFem++*

Mots-clés : *Équation de la chaleur, optimisation*



Présentation et géométrie

Nous noterons Ω l'ouvert représentant le four, S l'ouvert représentant la pièce à chauffer. Le four est un carré de 1m de coté, et la pièce est un rectangle de 1m sur 0.4m, au centre du four (pour simplifier, on prendra l'origine au centre du carré). Nous noterons C_i ($i = 1, \ldots, N_r$) les résistances (modélisées ici comme des cercles de rayon 0.05), et placées aux points $(\pm 0.75, \pm 0.75)$ (dans un premier temps, $N_r = 4$).

Le bord supérieur du four Γ_u est supposé maintenu à $T_u = 50\,°\mathrm{C}$, le bord inférieur Γ_d à $T_d = 10\,°\mathrm{C}$, et les deux bords latéraux Γ_l sont isolés (flux de chaleur nul). La température est ainsi solution de l'équation

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(k \text{ grad } T) &= f && \text{dans } \Omega \\ T &= T_u && \text{sur } \Gamma_u \\ T &= T_d && \text{sur } \Gamma_d \\ k\frac{\partial T}{\partial n} &= 0 && \text{sur } \Gamma_l \end{aligned}$$

Dans cette équation, k est le coefficient de diffusion thermique, qui est variable et vaut 1 dans la pièce, et 10 dans le reste du four. f est la source de chaleur, et sera de la forme $f = \sum_{i=1}^{N_r} \alpha_i \mathbf{1}_{\mathbf{C_i}}$, où les coefficients α_i sont à déterminer.

Problème direct

On suppose connus les coefficients α, et l'on cherche à calculer la température qui en résulte. On notera $T(\alpha)$ la solution du problème correspondant.

Problème inverse

On se donne une température souhaitée T_c dans S, et l'on cherche les coefficients α de façon à ce que $T(\alpha)$ soit "proche" de T_c dans S. Plus précisément, on cherche à minimiser la fonctionnelle

$$J(\alpha) = \frac{1}{2}\int_S |T(\alpha) - T_c|^2 dx$$

Notons T_0 la solution du problème direct correspondant à $\alpha = 0$, et T_i ($i = 1, \ldots, N_r$) les solutions correspondant à $\alpha = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (1 en i ème position). Par linéarité, on voit que $T(\alpha) = T_0 + \sum_{i=1}^{N_r} \alpha_i T_i$. Par conséquent, J se développe, et on obtient

$$J(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^T A\alpha - \alpha^T b + \frac{1}{2}\int_S |T_0 - T_c|^2 dx,$$

où la matrice A a pour éléments

$$A_{ij} = \int_S T_i T_j dx,$$

et

$$b_i = \int_S T_i(T_c - T_0) dx.$$

Les coefficients optimaux cherchés sont donc la solution du système linéaire $A\alpha = b$ (de dimension N_r), et la solution du problème inverse est $T(\alpha) = T_0 + \sum_{i=1}^{N_r} \alpha_i T_i$.

Travail demandé

Problème direct

Écrire soigneusement la formulation variationnelle du problème direct. Programmer la résolution de ce problème, pour calculer d'abord T_0, puis les T_i, pour $i = 1, \ldots, N_r$.

Chercher un maillage convenable (on pourra expérimenter avec l'adaptation de maillage de FreeFem).

Problème inverse

À partir des résultats précédents, calculer la matrice A et le vecteur b. Résoudre le système correspondant, et calculer la solution optimale.

Reprendre l'ensemble du problème si l'on rajoute deux résistances en $(0, \pm 0.75)$. Cela vaut-il la peine ?