

FORMULATION MATRICIELLE

PRÉVISION D'ÉVÉNEMENTS GLOBAUX PAR UNE DESCRIPTION DE TRANSFORMATIONS LOCALES GÉNÉRIQUES

David Ryckelynck

Centre des Matériaux, Mines ParisTech

30 novembre 2018

- 1 Motivations
- 2 Formulation en dimension finie
- 3 Assemblage de contributions au système matriciel
- 4 Bibliothèque d'éléments finis

En mécanique, la globalité des problèmes est difficilement contournable.



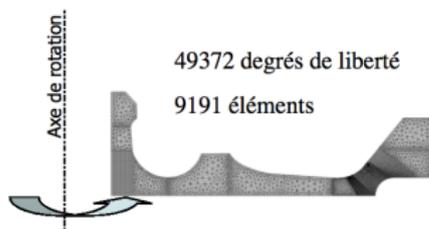
En thermique, il est plus facile de mettre en œuvre une isolation qui restreint en espace l'étendu des bilans thermiques.

Les mécaniciens sont des spécialistes de problèmes globaux.

Aujourd'hui, modéliser c'est très souvent passer du réel à un modèle numérique.



http://mms2.ensmp.fr/mmc_paris/cas/disques.php



Objectifs de la modélisation numérique :

comprendre, anticiper, optimiser

L'approximation par éléments finis concerne la représentation de champs pour des milieux continus :

$$\underline{\mathbf{u}}_h(\underline{\mathbf{x}}), \underline{\mathbf{x}} \in \Omega$$

$\underline{\mathbf{x}}$: vecteur position dans repère $(0, \underline{\mathbf{e}}_x, \underline{\mathbf{e}}_y, \cdot)$.

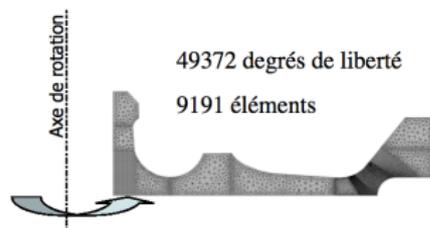
Mais modéliser entraîne des erreurs d'approximation.

$$\eta = \|\underline{\mathbf{u}}_h - \underline{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)}$$

Les étapes de la modélisation en mécanique des structures :



http://mms2.ensmp.fr/mmc_paris/cas/disques.php



49372 degrés de liberté

9191 éléments

- Passer de l'événement à modéliser à problème de mécanique des milieux continus

Isoler un système en définissant Ω , choisir un scénario (CL, CI), modéliser le comportement des matériaux.

- Passer du continu au modèle numérique, ou à une formulation matricielle

Appliquer la méthode des éléments finis et un schéma d'intégration temporelle si besoin.

- Passer du modèle numérique au modèle informatique

Programmer ou choisir un logiciel de simulation adapté, réaliser un maillage, fournir les données numériques (CL, CI, matériaux), choisir des données à extraire de la simulation, choisir un moyen de calcul adapté.

- Analyser les résultats de la simulation

Que faut-il pour obtenir une formulation matricielle ?

Une formulation en dimension finie.

Nous ne considérons ici que les problèmes linéaires indépendants du temps.

Principe des puissances virtuels

$$\mathcal{P}^{i*} + \mathcal{P}^{e*} = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{u}}^* \text{ CA à } 0$$

complété d'une équation de comportement élastique linéaire.

Formulation faible
des équations aux dérivées partielles

$$a(\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{u}}) = b(\underline{\mathbf{u}}^*) \quad \forall \underline{\mathbf{u}}^* \in H_0^1(\Omega)$$

a est une forme bilinéaire.
 b est une forme linéaire.

D'un espace d'approximation de dimension finie, on déduit un problème global : trouver \mathbf{q} tel que,

$$\mathbf{Kq} = \mathbf{F} \quad (\text{Formulation matricielle})$$

où \mathbf{K} et \mathbf{F} sont constitués de **contributions d'éléments** d'un maillage.

Le choix d'un sous-espace de dimension finie pour représenter les champs inconnus et les champs tests, suffit pour obtenir une formulation matricielle à partir d'une formulation faible.

$$\mathcal{V}_h = \left\{ \underline{\mathbf{v}} \in H_0^1(\Omega) \mid \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^n \underline{\phi}_i(\underline{\mathbf{x}}) q_i \right\}$$

avec $(\underline{\phi}_i)_{i=1}^n$ base des fonctions de forme du modèle aux éléments finis.

$$\underline{\mathbf{u}}_h \in \mathcal{V}_h, \quad a(\underline{\mathbf{u}}_h^*, \underline{\mathbf{u}}_h) = b(\underline{\mathbf{u}}_h^*) \quad \forall \underline{\mathbf{u}}_h^* \in \mathcal{V}_h$$

Forme bilinéaire en dimension n / forme linéaire en dimension n

Le choix d'un sous-espace de dimension finie pour représenter les champs inconnus et les champs tests, suffit pour obtenir une formulation matricielle à partir d'une formulation faible.

$$\mathcal{V}_h = \left\{ \underline{\mathbf{v}} \in H_0^1(\Omega) \mid \underline{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \underline{\phi}_i(\mathbf{x}) q_i \right\}$$

avec $(\underline{\phi}_i)_{i=1}^n$ base des fonctions de forme du modèle aux éléments finis.

$$\underline{\mathbf{u}}_h \in \mathcal{V}_h, \quad a(\underline{\mathbf{u}}_h^*, \underline{\mathbf{u}}_h) = b(\underline{\mathbf{u}}_h^*) \quad \forall \underline{\mathbf{u}}_h^* \in \mathcal{V}_h$$

Forme bilinéaire en dimension n / forme linéaire en dimension n

$$\Rightarrow \exists \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{F} \in \mathbb{R}^n \mid a(\underline{\mathbf{u}}_h^*, \underline{\mathbf{u}}_h) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_j^* K_{ji} q_i, \quad b(\underline{\mathbf{u}}_h^*) = \sum_{j=1}^n q_j^* F_j$$

$$\text{avec } \underline{\mathbf{u}}_h = \sum_{i=1}^n \underline{\phi}_i q_i, \quad \underline{\mathbf{u}}_h^* = \sum_{j=1}^n \underline{\phi}_j q_j^*$$

On peut déduire \mathbf{K} et \mathbf{F} de $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot)$, **mais il manque ici la notion essentielle d'assemblage.**

Un système est vu comme un assemblage d'éléments :

$$\Omega = \cup_{e=1}^{N_e} \Omega_e$$

L'énergie et la puissance d'un système sont des grandeurs extensives qui permettent de considérer l'assemblage de contributions.

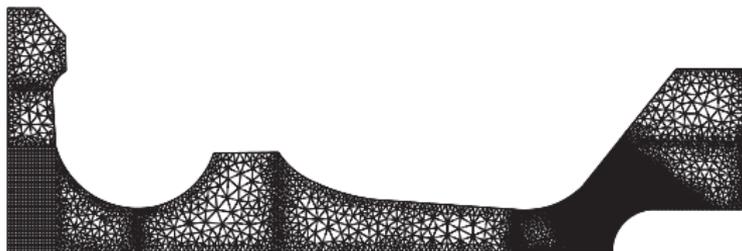
Un système est vu comme un assemblage d'éléments :

$$\Omega = \cup_{e=1}^{N_e} \Omega_e$$

L'énergie et la puissance d'un système sont des grandeurs extensives qui permettent de considérer l'assemblage de contributions.

La puissance virtuelle des actions mécaniques ou la forme faible (intégrale) d'équations aux dérivées partielles, sont aussi des grandeurs extensives qui permettent de considérer l'assemblage de contributions.

Le système global est une somme de contributions locales.



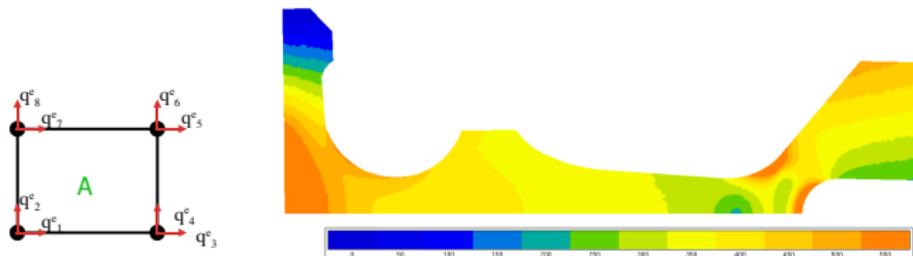
Le domaine Ω est découpé en éléments : $\Omega = \cup_{e=1}^{N_e} \Omega_e$.

Somme de contributions :

$$a(\underline{\mathbf{u}}_h^*, \underline{\mathbf{u}}_h) = \sum_{e=1}^{N_e} a_e(\underline{\mathbf{u}}_h^*, \underline{\mathbf{u}}_h)$$

$$b(\underline{\mathbf{u}}_h^*) = \sum_{e=1}^{N_e} b_e(\underline{\mathbf{u}}_h^*)$$

- Etape d'assemblage : $\tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{F}}$
- Etape de **paramétrage cinématique** pour tenir compte des conditions aux limites : $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{K}}[\mathcal{L}, \mathcal{L}]$, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^n$
- Etape globale de résolution du système linéaire : $\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$
- Etape locale : en mécanique, calcul des contraintes à partir des déplacements de l'élément $\mathbf{q}^e \in \mathbb{R}^{n^e}$



Carte de la contrainte équivalente de von Mises dessinée élément par élément.

La concentration locale des contraintes résulte d'un équilibre global sur une géométrie particulière.

Etape de **paramétrage cinématique** par $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$: $\underline{\mathbf{u}}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \underline{\phi}_i(\mathbf{x}) \tilde{q}_i$

$a(\underline{\mathbf{u}}_h^*, \underline{\mathbf{u}}_h)$ correspond à $-\mathcal{P}^{i*}$:

$$-\mathcal{P}^{i*} := \int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\mathbf{u}}_h) : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{u}}_h^*) d\Omega = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\mathbf{u}}_h) : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{u}}_h^*) d\Omega$$

Définition élément par élément de matrices élémentaires, notion sous-jacente de bibliothèque d'éléments :

$$\int_{\Omega_e} \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\mathbf{u}}_h) : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{u}}_h^*) d\Omega = \mathbf{q}^{e*T} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e, \quad \mathbf{K}^e \in \mathbb{R}^{n^e \times n^e}$$

Assemblage de matrices $\tilde{n} \times \tilde{n}$ en passant par les puissances virtuelles et des vecteurs globaux :

$$\sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{q}^{e*T} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e = \sum_{e=1}^{N_e} \tilde{\mathbf{q}}^{*T} \tilde{\mathbf{K}}^e \tilde{\mathbf{q}}, \quad \tilde{\mathbf{K}}^e \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{K}} = \sum_{e=1}^{N_e} \tilde{\mathbf{K}}^e$$

Deux fonctions bilinéaires sont identiques pour $\mathbf{q}^e(\tilde{\mathbf{q}})$ et $\mathbf{q}^{e*}(\tilde{\mathbf{q}}^*)$ et tout $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}^*$.

Exemple d'assemblage de contributions à la matrice de rigidité

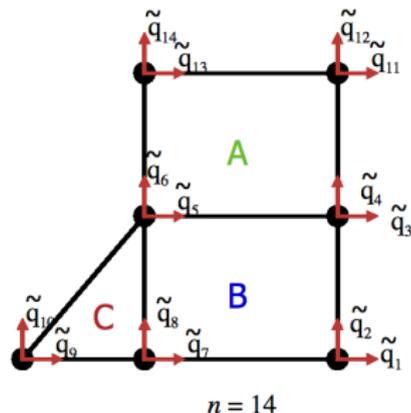
Sur chaque élément Ω_e , on définit $\underline{\mathbf{u}}_h$ par interpolation de n^e valeurs nodales. $\underline{\mathbf{u}}_h^*$ suit la même règle d'interpolation que $\underline{\mathbf{u}}_h$ (méthode de Galerkin).

Supposons connue la matrice de rigidité élémentaire de l'élément A : $\mathbf{K}^{eA} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$.

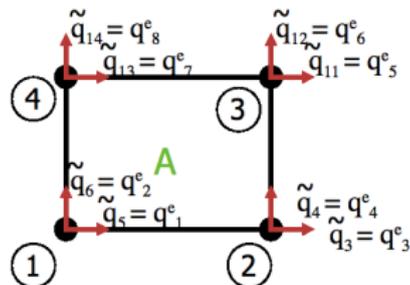
Identifions la contribution $\tilde{\mathbf{K}}^A \in \mathbb{R}^{14 \times 14}$ de l'élément A à la matrice de rigidité $\tilde{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}^{14 \times 14}$ du système.

$$\tilde{K}_{ij}^A = \mathbf{q}^{e*T} \mathbf{K}^{eA} \mathbf{q}^e$$

pour $\tilde{q}_k^* = \delta_{ki}$, $\tilde{q}_k = \delta_{kj}$ et $\mathbf{q}^{e*}(\tilde{\mathbf{q}}^*)$, $\mathbf{q}^e(\tilde{\mathbf{q}})$.



Remarque : si \tilde{q}_i ou \tilde{q}_j ne sont pas connectés à A alors $\tilde{K}_{ij} = 0$.

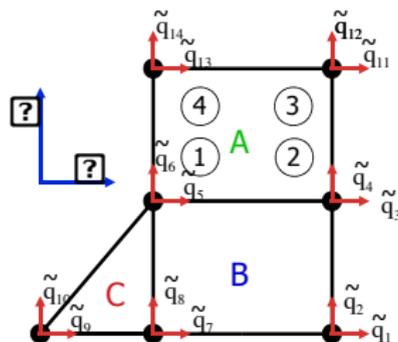


Boucle d'assemblage de la matrice de rigidité

Termes non nuls de la contribution de l'élément A :

	q_3^e, q_4^e				q_1^e, q_2^e				q_5^e, q_6^e				q_7^e, q_8^e				
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	x	x	x	x	0	0	0	0	0	x	x	x	x				
		x	x	x	0	0	0	0	0	x	x	x	x				
			x	x	0	0	0	0	0	x	x	x	x				
				x	0	0	0	0	0	x	x	x	x				
					0	0	0	0	0	0	0	0	0				
						0	0	0	0	0	0	0	0				
							0	0	0	0	0	0	0				
								0	0	0	0	0	0				
									0	0	0	0	0				
										0	0	0	0				
											0	0	0				
												0	0				
													0				
														0			
															0		
																0	
																	0

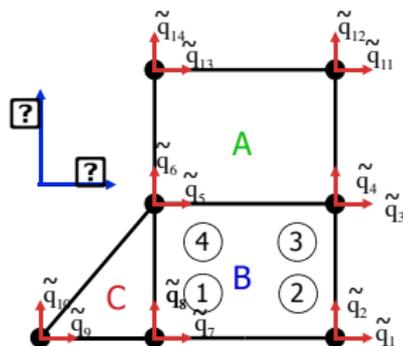
Matrice symétrique



Boucle d'assemblage de la matrice de rigidité

Degrés de liberté connectés à l'élément B :

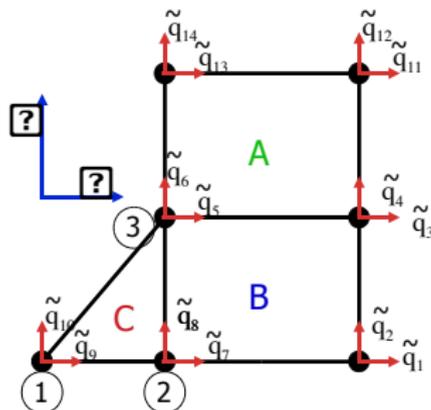
$$\begin{array}{cc} q_3^c & q_4^c & q_5^c & q_6^c & q_7^c & q_8^c & q_1^c & q_2^c \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 & q_8 \end{array}$$



Matrice symétrique

Degrés de liberté connectés à l'élément C :

$$\begin{array}{ccc} q_5^e & q_6^e & q_3^e & q_4^e & q_1^e & q_2^e \\ q_5 & q_6 & q_7 & q_8 & q_9 & q_{10} \end{array}$$



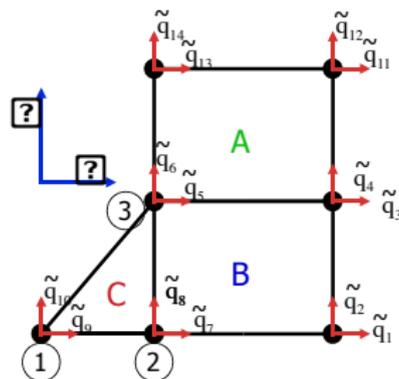
Matrice symétrique

Boucle d'assemblage de la matrice de rigidité

Termes non nuls de la contribution de l'élément C :

	q_3^c	q_6^c	q_3^c	q_4^c	q_1^c	q_2^c														
x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	x	x	x	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		xx	xx	xx	xx	x	x	0	0	x	x	x	x							
			xx	xx	xx	x	x	0	0	x	x	x	x							
				xx	xx	xx	xx	x	x	x	x	x	x							
					xx	xx	x	x	x	x	x	x	x							
						xx	xx	x	x	0	0	0	0							
							xx	xx	x	x	0	0	0							
								x	x	0	0	0	0							
									x	0	0	0	0							
										x	x	x	x							
											x	x	x							
												x	x							
													x							

Matrice symétrique



Puissance virtuelle de la force appliquée au système :

$$-F \tilde{q}_{12}^* = \tilde{\mathbf{q}}^{*T} \hat{\mathbf{F}} \quad \forall \tilde{\mathbf{q}}^*$$

donc $\hat{F}_k = -F \delta_{k12}$.

Le champ de déplacement est cinématiquement admissible si :

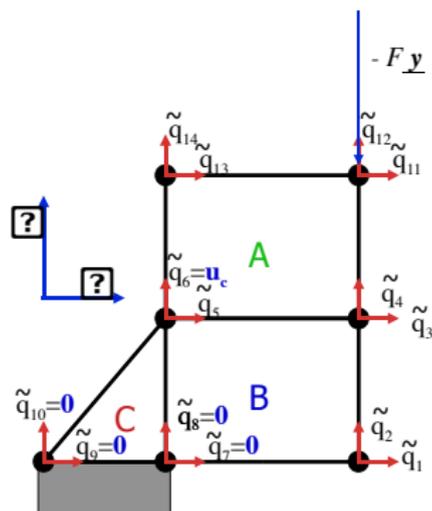
$$\tilde{q}_7 = \tilde{q}_8 = \tilde{q}_9 = \tilde{q}_{10} = 0$$

et

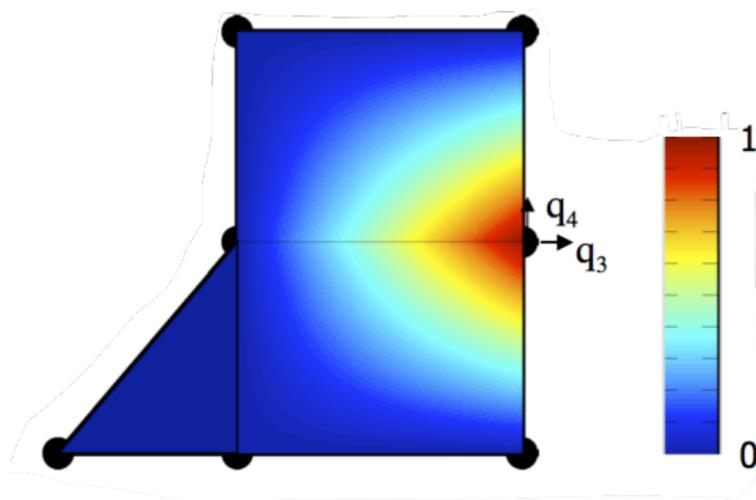
$$\tilde{q}_6 = u_c$$

Deux approches possibles :

- éliminer les degrés de liberté connus, dans ce cas $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$, $\mathcal{L} = \{1, 2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14\}$,
- modifier les lignes et les colonnes de $\tilde{\mathbf{K}}$ et les lignes de $\tilde{\mathbf{F}}$ pour $i = 6, 7, 8, 9, 10$, afin d'y inclure les conditions cinématiques.

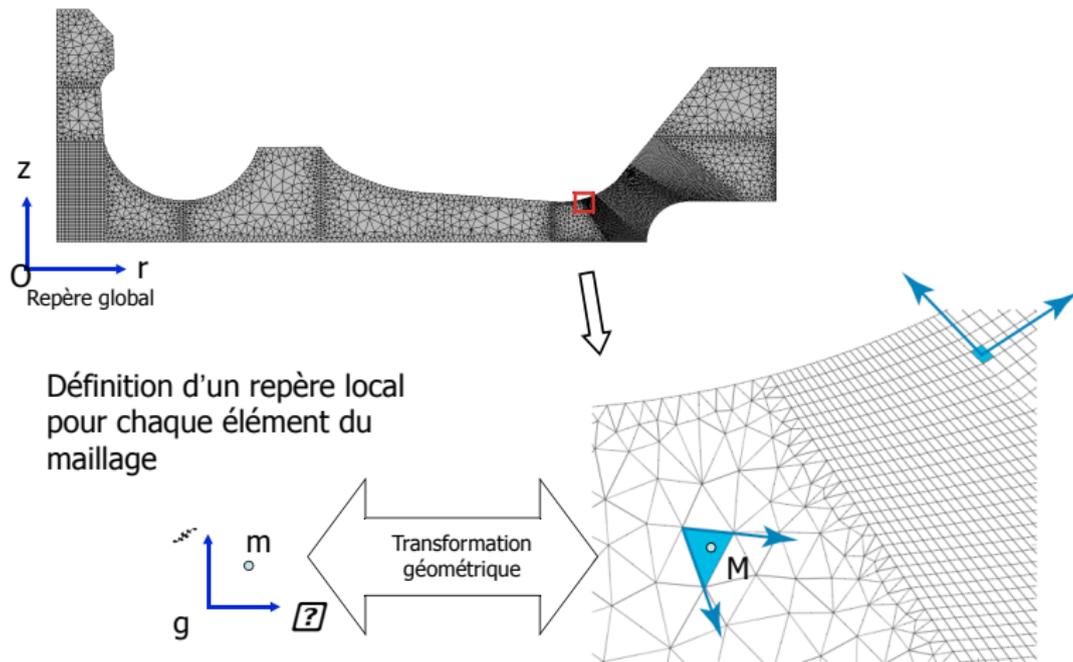


$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \underline{\phi}(\underline{x}) \mathbf{q}$$



L'interpolation des déplacements nodaux \mathbf{q} est définie par morceaux à l'aide d'éléments et d'un maillage.

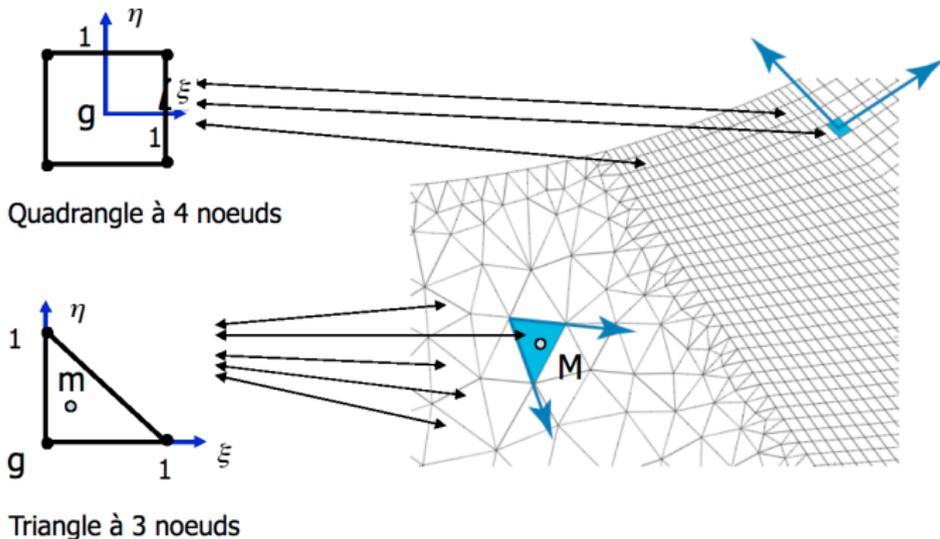
Repère global et repère local de l'élément



Pour chaque élément on introduit un changement de variable :

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} r \\ z \end{bmatrix} = \phi^e(\xi, \eta) \mathbf{p}^e$$

Un élément de référence par type d'élément



Bijection établie successivement pour chaque élément du maillage (C++ bien adapté).

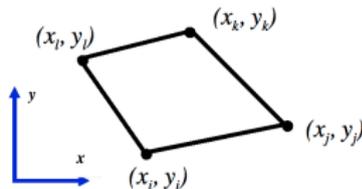
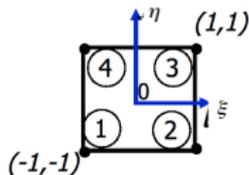
Interpoler la position des nœuds de l'élément pour parcourir l'espace.

$$\underline{\mathbf{x}} = \phi^e(\xi, \eta) \mathbf{p}^e \quad \forall (\xi, \eta)$$

Interpolation en 2D construite à l'aide d'une interpolation de Lagrange et du triangle de Pascal :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & & \xi & \eta \\ & & & & & & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 \\ & & & & & & \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \eta^3 \end{array}$$

Pour n^e nœuds il faut n^e monômes.



Elément de référence à gauche, élément dans le maillage à droite

$$x = \phi^{e 1D}(\xi, \eta) \mathbf{p}_x^e \quad \forall (\xi, \eta), \quad \mathbf{p}_x^{eT} = [x_i, x_j, x_k, x_l]$$

$$y = \phi^{e 1D}(\xi, \eta) \mathbf{p}_y^e \quad \forall (\xi, \eta), \quad \mathbf{p}_y^{eT} = [y_i, y_j, y_k, y_l]$$

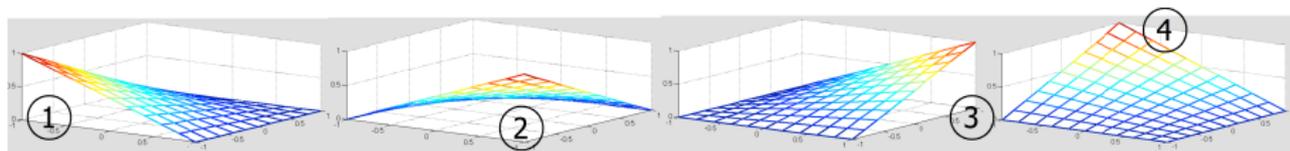
$$\phi^{e 1D}(\xi, \eta) = [\phi_1^e(\xi, \eta), \phi_2^e(\xi, \eta), \phi_3^e(\xi, \eta), \phi_4^e(\xi, \eta)]$$

Table de connectivité de l'élément : les indices $[i, j, k, l]$ correspondent à $[1, 2, 3, 4]$ dans l'élément de référence.

Superposition de 4 monômes dans $[-1, 1] \times [-1, 1]$

Noeuds de l'élément : $[i, j, k, l]$

$$x = \phi_1^e(\xi, \eta) x_i + \phi_2^e(\xi, \eta) x_j + \phi_3^e(\xi, \eta) x_k + \phi_4^e(\xi, \eta) x_l$$



Fonctions de forme élémentaires $\phi_1^e(\xi, \eta)$ $\phi_2^e(\xi, \eta)$ $\phi_3^e(\xi, \eta)$ $\phi_4^e(\xi, \eta)$

4 monômes par fonctions de forme : 4×4 conditions d'interpolation

$$\phi_1^e(-1, -1) = 1 \quad \phi_2^e(-1, -1) = 0 \quad \phi_3^e(-1, -1) = 0 \quad \phi_4^e(-1, -1) = 0 \quad (1)$$

$$\phi_1^e(1, -1) = 0 \quad \phi_2^e(1, -1) = 1 \quad \phi_3^e(1, -1) = 0 \quad \phi_4^e(1, -1) = 0 \quad (2)$$

$$\phi_1^e(1, 1) = 0 \quad \phi_2^e(1, 1) = 0 \quad \phi_3^e(1, 1) = 1 \quad \phi_4^e(1, 1) = 0 \quad (3)$$

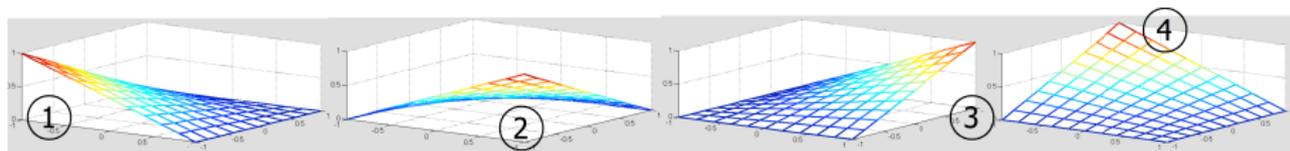
$$\phi_1^e(-1, 1) = 0 \quad \phi_2^e(-1, 1) = 0 \quad \phi_3^e(-1, 1) = 0 \quad \phi_4^e(-1, 1) = 1 \quad (4)$$

Seul x_i intervient dans la position du point $x(-1, -1)$...

Superposition de 4 monômes dans $[-1, 1] \times [-1, 1]$

Noeuds de l'élément : $[i, j, k, l]$

$$x = \phi_1^e(\xi, \eta) x_i + \phi_2^e(\xi, \eta) x_j + \phi_3^e(\xi, \eta) x_k + \phi_4^e(\xi, \eta) x_l$$



Fonctions de forme élémentaires $\phi_1^e(\xi, \eta)$ $\phi_2^e(\xi, \eta)$ $\phi_3^e(\xi, \eta)$ $\phi_4^e(\xi, \eta)$

4 monômes par fonctions de forme : 4×4 conditions d'interpolation

$$\phi_1^e(-1, -1) = 1 \quad \phi_2^e(-1, -1) = 0 \quad \phi_3^e(-1, -1) = 0 \quad \phi_4^e(-1, -1) = 0 \quad (1)$$

$$\phi_1^e(1, -1) = 0 \quad \phi_2^e(1, -1) = 1 \quad \phi_3^e(1, -1) = 0 \quad \phi_4^e(1, -1) = 0 \quad (2)$$

$$\phi_1^e(1, 1) = 0 \quad \phi_2^e(1, 1) = 0 \quad \phi_3^e(1, 1) = 1 \quad \phi_4^e(1, 1) = 0 \quad (3)$$

$$\phi_1^e(-1, 1) = 0 \quad \phi_2^e(-1, 1) = 0 \quad \phi_3^e(-1, 1) = 0 \quad \phi_4^e(-1, 1) = 1 \quad (4)$$

Seul x_i intervient dans la position du point $x(-1, -1)$... On obtient :

$$\phi_1^e(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 - \eta)/4$$

$$\phi_2^e(\xi, \eta) = (1 + \xi)(1 - \eta)/4$$

...

Changement de variable $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^e(\xi, \eta) & 0 & \phi_2^e(\xi, \eta) & 0 & \phi_3^e(\xi, \eta) & 0 & \phi_4^e(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & \phi_1^e(\xi, \eta) & 0 & \phi_2^e(\xi, \eta) & 0 & \phi_3^e(\xi, \eta) & 0 & \phi_4^e(\xi, \eta) \end{bmatrix} \mathbf{p}^e$$

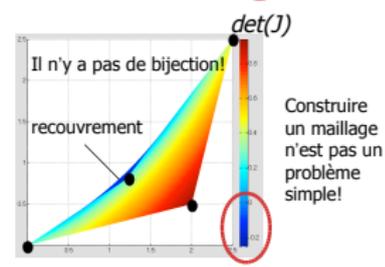
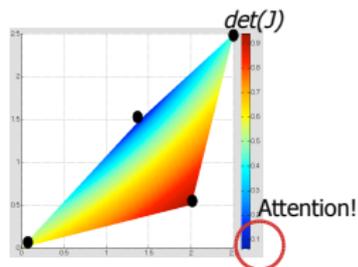
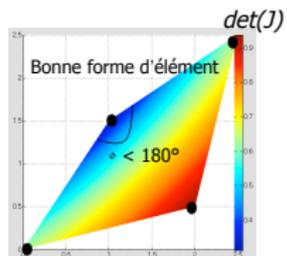
$$\mathbf{p}^{eT} = [x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l]$$

Pour avoir un changement de variable, la matrice jacobienne doit être inversible en tout point de l'élément de référence.

$$\int_{\Omega_e} \cdot d\Omega = \int_{\xi} \int_{\eta} \cdot \det(\mathbf{J})(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Critère de qualité sur la forme des éléments du maillage



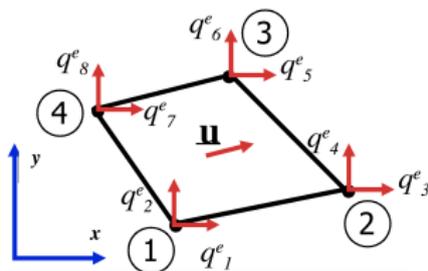
Déterminant de la matrice jacobienne en tout point de l'élément.

L'angle le plus grand doit être inférieur à 180° pour avoir un changement de variable bien défini.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underline{\phi}^e(\xi, \eta) \mathbf{p}^e$$

$$\underline{\phi}^e = \begin{bmatrix} \phi_1^e(\xi, \eta) & 0 & \phi_2^e(\xi, \eta) & 0 & \phi_3^e(\xi, \eta) & 0 & \phi_4^e(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & \phi_1^e(\xi, \eta) & 0 & \phi_2^e(\xi, \eta) & 0 & \phi_3^e(\xi, \eta) & 0 & \phi_4^e(\xi, \eta) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \underline{\phi}^e(\xi, \eta) \mathbf{q}^e$$



Calcul des composantes du tenseur de déformation et du tenseur de contrainte :

$$\varepsilon_{xx} := \frac{\partial u_x}{\partial X} = \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \mathbf{q}^e, \quad \underline{\varepsilon} = \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e, \quad \underline{\sigma} = \mathbf{C} \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e$$

avec $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}$.

Puissance virtuelle des efforts intérieurs (avec un signe moins) :

$$\int_{\Omega_e} \underline{\varepsilon}(\underline{\mathbf{u}}_h^*) : \underline{\sigma}(\underline{\mathbf{u}}_h) d\Omega = \int_{\xi} \int_{\eta} \mathbf{q}^{e*T} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C} \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta := \mathbf{q}^{e*T} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e$$

On en déduit :

$$\mathbf{K}^e = \int_{\xi} \int_{\eta} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C} \mathbf{B}^e \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta$$

- Méthode des éléments finis, G. Dhatt, G. Touzot, E. Lefrançois, Hermes
- La méthode des éléments finis, O. C. Zienkiewicz, traduction, McGraw-Hill Inc.
- *Introduction to Finite Element Methods*