

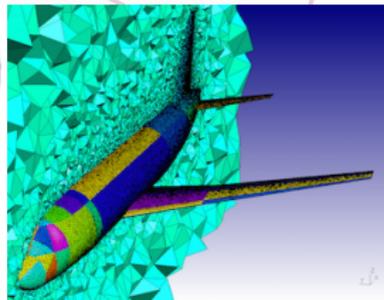
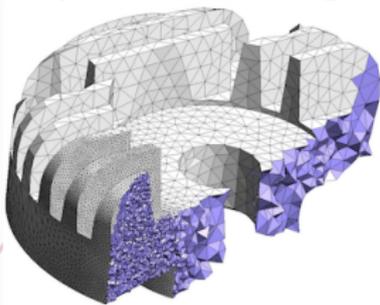
# Maillages

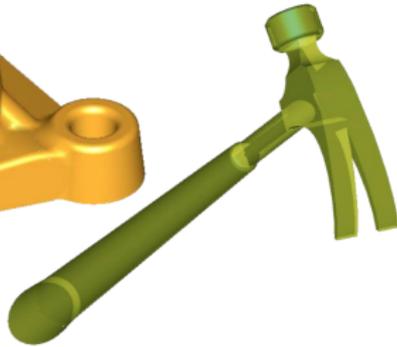
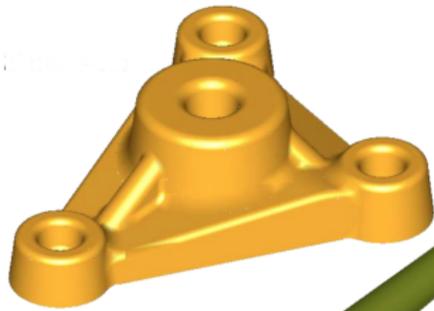
*PSL Week: Éléments Finis*

Nicole Spillane

26 novembre 2021

École des Mines Paristech





## Référence



Pascal Frey et Paul-Louis George. Maillages. Hermes, 1999.

- 1 Définitions
- 2 Triangulation de Delaunay
- 3 Mailler
- 4 Remailler



## Définitions

# Triangulations

Soit un ensemble fini de points  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbb{R}^d$ .

Soit  $\Omega$  l'enveloppe convexe de  $\mathcal{S}$ .

## Def. : Recouvrement $\mathcal{T}$

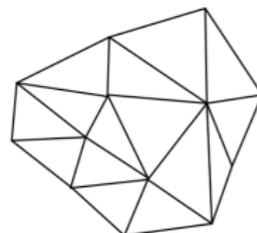
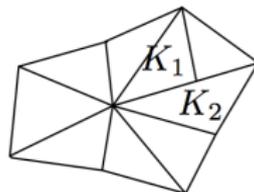
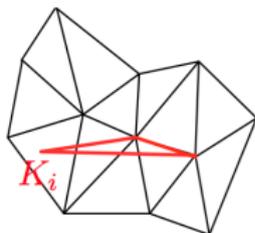
1. Les sommets sont ceux de  $\mathcal{S}$ ,
2.  $\Omega$  est l'union des éléments  $K \in \mathcal{T}$ ,
3. Cette union est disjointe,
4.  $\text{Int}(K) \neq \emptyset$ .

## Def. : Recouvrement Simplicial

Recouvrement dont les éléments sont des simplexes c'est-à-dire des triangles en 2d ou des tétraèdres en 3d.

## Def. : Triangulation

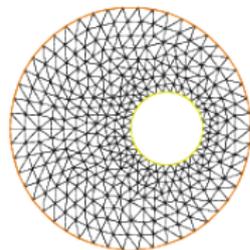
Une triangulation est un recouvrement conforme.



## Définition : Maillages

**Def. : Maillage d'un domaine borné  $\Omega$**

Triangulation conforme de  $\Omega$ .



**Def. : Connectivité d'un maillage**

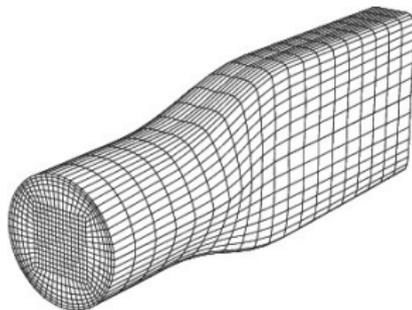
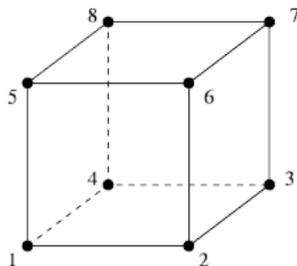
Type de connexions entre ses sommets.

**Def. : Topologie d'un élément**

Définition de cet élément au moyen de ses arêtes et de ses faces.

**Def. : Maillage Structuré ou "grille"**

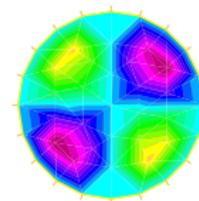
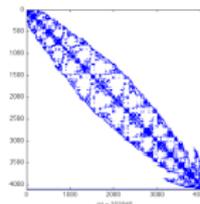
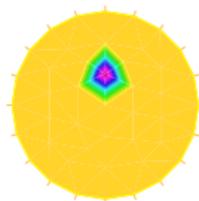
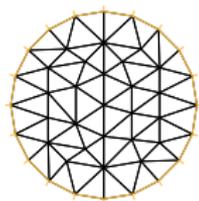
Un maillage est dit structuré si sa connectivité est de type *différence finie*. Sinon il est non structuré.



# Importance des maillages

## Simulation par Éléments Finis

1. Construction du maillage (éléments géométriques)
2. Interpolation (éléments finis)
3. Construction de la matrice et du second membre
4. Résolution du système linéaire
5. Post-traitement et visualisation



Toutes les étapes dépendent du choix du maillage

## Qu'est-ce qu'un bon maillage ?

À chaque étape du slide précédent on effectue des approximations et donc on commet des erreurs.

Le maillage influe sur la précision à travers :

- ▶ l'erreur de discrétisation géométrique,
- ▶ l'erreur d'interpolation,

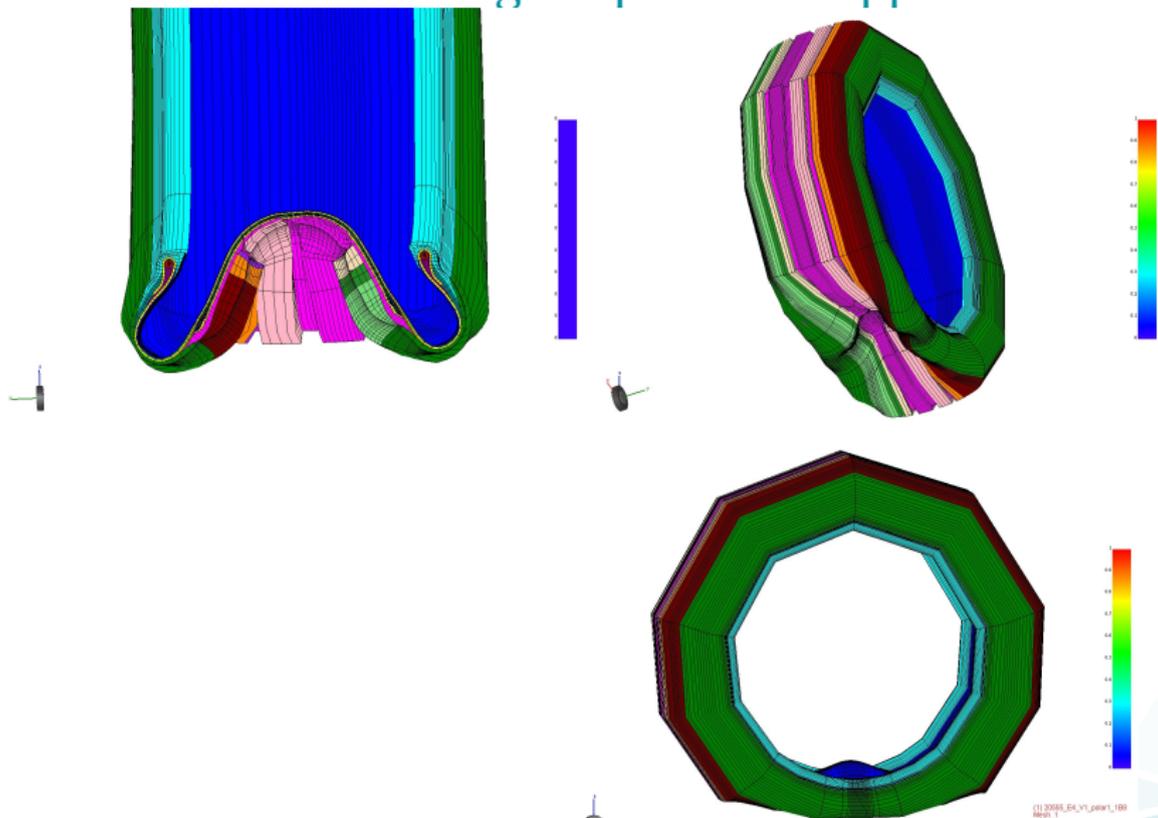
$$\sigma_K = \frac{\rho_K}{h_K}, \text{ où } \begin{cases} \rho_K : \text{rayon boule inscrite} \\ h_K : \text{diamètre de } K \end{cases} \quad (\text{qualité des éléments}),$$

- ▶ la précision à laquelle on peut résoudre le système linéaire (conditionnement et taille du système), cf. le cours de Christophe Bovet hier,
- ▶ le post-traitement.

Compromis à trouver entre :

- ▶ Précision,
- ▶ Temps de calcul de chaque étape,
- ▶ Degré d'automatisme.

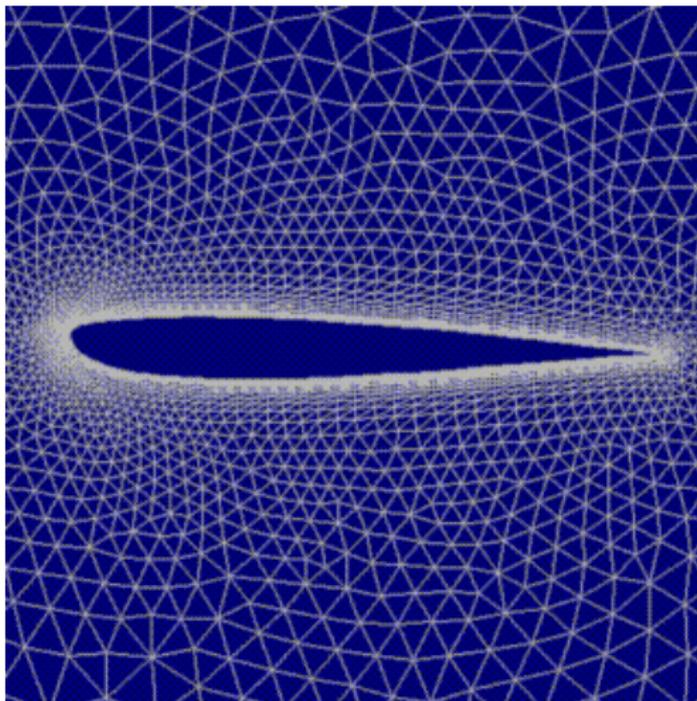
# La notion de "bon" maillage dépend de l'application



Maillages fournis par Michelin

(1) 2008\_ELV1\_pain\_L180  
Rept\_1

# La notion de "bon" maillage dépend de l'application

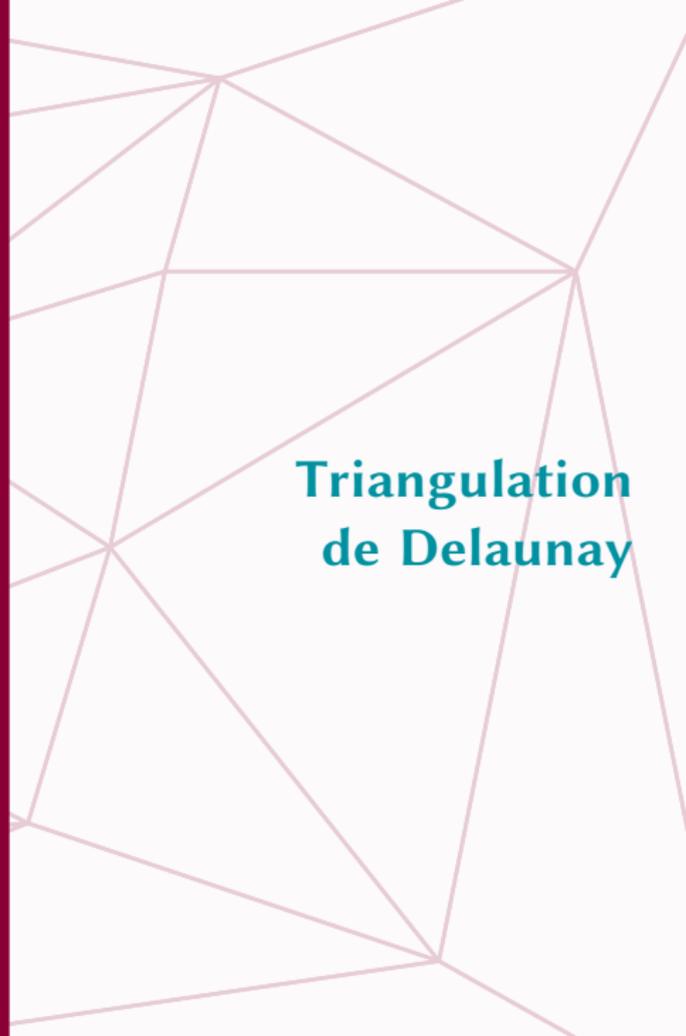


**1** Définitions

**2** Triangulation de Delaunay

**3** Mailler

**4** Remailler



**Triangulation  
de Delaunay**

# Triangulation de Delaunay

- ▶ Donnée : Un nuage de point.
- ▶ Sortie : Une triangulation simpliciale de son enveloppe convexe.

## Triangulation de Delaunay – Critère de la boule vide

Une triangulation  $\mathcal{T}$  est *de Delaunay* si les boules ouvertes circonscrites aux éléments de  $\mathcal{T}$  ne contiennent aucun sommet de  $\mathcal{S}$ .

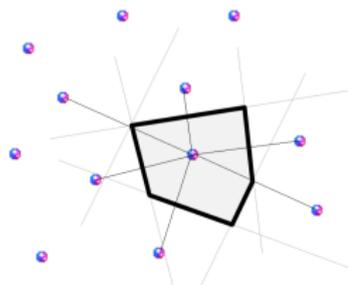
### Propriétés

- ✓ Existence garantie.
- ✓ Bonne qualité d'interpolation
- ✓ En 2d : Triangles avec bon critère de forme (quasi équilatéraux).
- ✗ Mais en 3d il peut exister des tétraèdres quasiment plats même si les arêtes ont presque toutes la même taille (besoin d'une phase d'optimisation du maillage après la génération).

# Dualité entre Diagramme de Voronoï et Triangulation de Delaunay

## Définition d'une cellule de Voronoï :

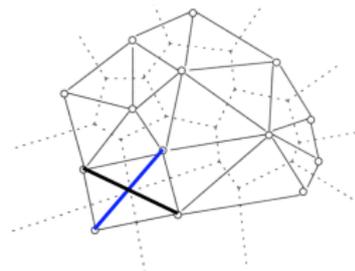
$V_i = \{P \in \Omega \text{ tels que } d(P, P_i) \leq d(P, P_j) \text{ pour tout } j \neq i\}$ .



Cellule de Voronoï  
 $V_i$  autour de  $P_i$



Diagramme de  
Voronoi

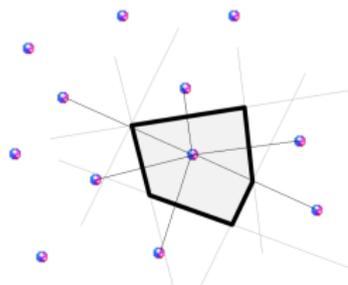


Triangulation de  
Delaunay

# Dualité entre Diagramme de Voronoï et Triangulation de Delaunay

## Définition d'une cellule de Voronoï :

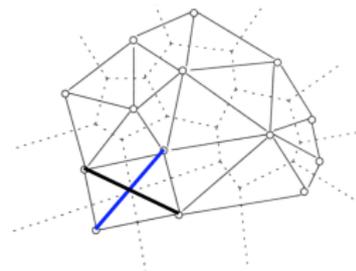
$V_i = \{P \in \Omega \text{ tels que } d(P, P_i) \leq d(P, P_j) \text{ pour tout } j \neq i\}.$



Cellule de Voronoï  
 $V_i$  autour de  $P_i$



Diagramme de  
Voronoi



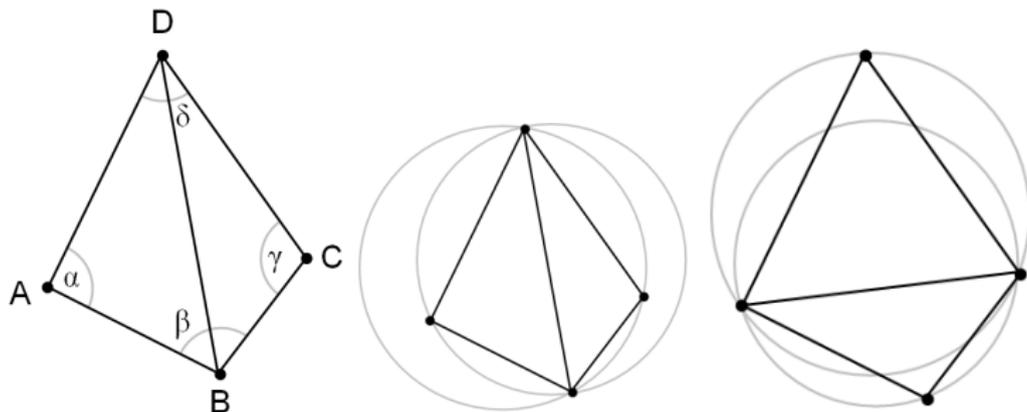
Triangulation de  
Delaunay

→ Permet de répondre aux problématiques d'existence et d'unicité.

# Triangulation de Delaunay par basculement d'arrête (algorithme de Lawson)

## Théorème

Il suffit de vérifier le critère de la boule vide localement (pour chaque paire de triangle).



Partant de n'importe quelle triangulation en 2d on arrive à la triangulation de Delaunay par basculement d'arrêtes.

- ▶ Ne peut pas se généraliser en 3D.
- ▶ Jusqu'à  $O(n^2)$  basculements ( $n$  : nombre de sommets).

# Algorithme de Bowyer-Watson, 1981 :

Ajout d'un point dans une triangulation de Delaunay

$$\mathcal{T}_{i+1} = \mathcal{T}_i - \mathcal{C}_P + \mathcal{B}_P$$

- ▶  $\mathcal{C}_P$  (cavité de  $P$ ) : éléments de  $\mathcal{T}_i$  dont la boule circonscrite contient  $P$
- ▶  $\mathcal{B}_P$  (boule de  $P$ ) : ensemble des éléments formés en joignant  $P$  aux faces externes de  $\mathcal{C}_P$

# Algorithme de Bowyer-Watson, 1981



Animation : Luamesh pour  $\LaTeX$  (M. Chupin) <https://melusine.eu.org/syracuse/G/delaunay/>

**1** Définitions

**2** Triangulation de Delaunay

**3** Mailler

**4** Remailler



**Mailler**

# Maillage plus complexe qu'une triangulation

## Triangulation

- ▶ Entrée : Nuage de points
- ▶ Sortie : Triangulation de l'enveloppe convexe

## Maillage

- ▶ Entrée : Maillage de la frontière d'un domaine  $\Omega$
- ▶ Sortie : Maillage de l'intérieur de  $\Omega$

Difficultés supplémentaires :  $\Omega$  n'est pas nécessairement convexe et il faut générer le nuage de points.



## Maillage : à partir de quelles données ?

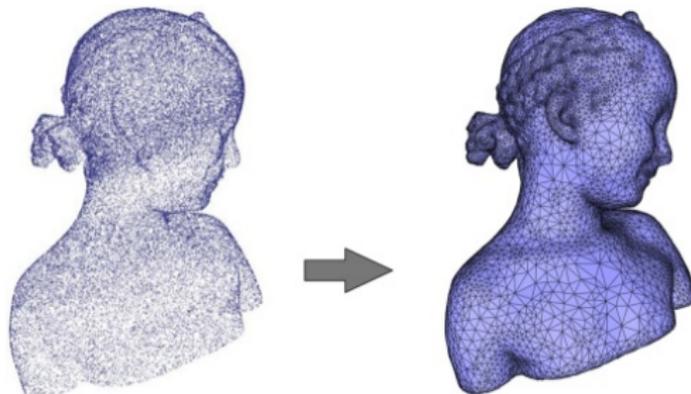
- ▶ Paramétrisation de la surface issue de la CAO ...
- ▶ Nuage de points de surface produit par un scanner 3d ...
- ▶ Domaine défini implicitement par imagerie médicale ...
- ▶ ...



Ruizo - <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1641370>

## Maillage : à partir de quelles données ?

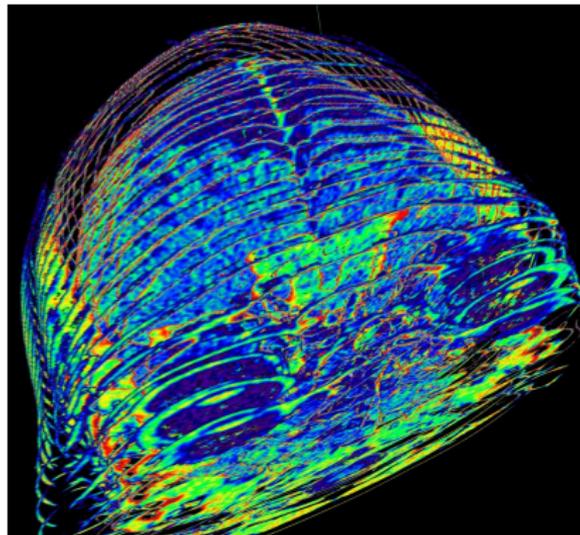
- ▶ Paramétrisation de la surface issue de la CAO ...
- ▶ Nuage de points de surface produit par un scanner 3d ...
- ▶ Domaine défini implicitement par imagerie médicale ...
- ▶ ...



CGAL, Computational Geometry Algorithms Library, <http://www.cgal.org>

## Maillage : à partir de quelles données ?

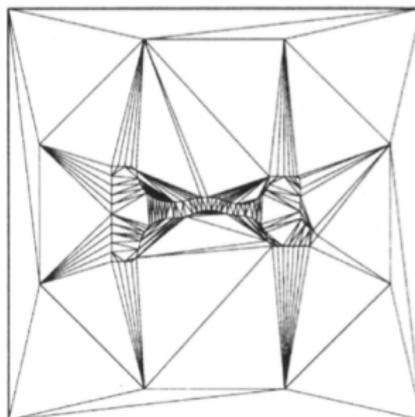
- ▶ Paramétrisation de la surface issue de la CAO ...
- ▶ Nuage de points de surface produit par un scanner 3d ...
- ▶ Domaine défini implicitement par imagerie médicale ...
- ▶ ...



By Dale Mahalko (Own work) CC BY-SA 3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>), via Wikimedia Commons

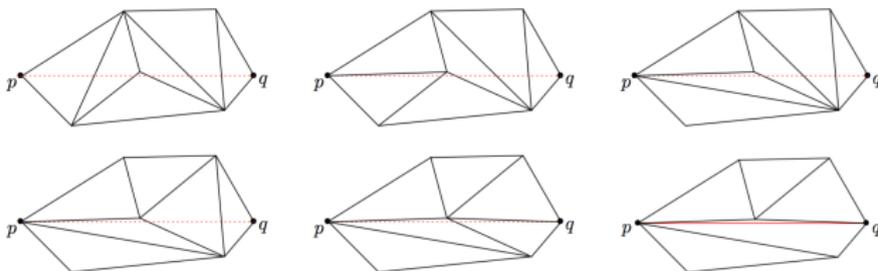
# Technique de maillage de Delaunay

1. Préliminaire : Maillage de la frontière du domaine.
2. Le domaine est plongé dans une boîte englobante convexe dont on connaît une triangulation de Delaunay.  
exemple : un rectangle divisé en deux triangles ou un parallélépipède divisé en 5 ou 6 tétraèdres.
3. Ajout de tous les points de la frontière du domaine par l'algorithme de Bowyer-Watson. On a un maillage de la boîte englobante avec les sommets de la frontière.



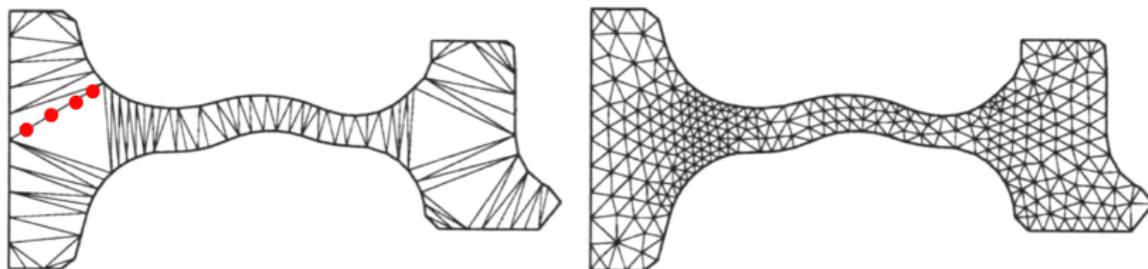
# Technique de maillage de Delaunay

4. Forçage du bord du domaine pour obtenir un maillage vide du domaine.



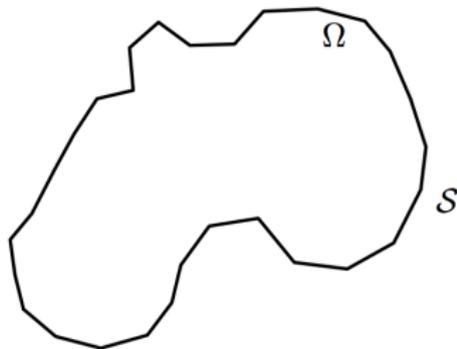
# Technique de maillage de Delaunay

5. Ajout de points intérieurs (et filtrage)
  - ▶ Discrétisation de chacune des arêtes qui est "trop" longue,
  - ▶ Avancée de front,
  - ▶ Insertion des barycentres des triangles existants,
  - ▶ Insertion des centres des cercles circonscrits...
6. Intégration de ces points dans la triangulation par l'algorithme de Bowyer-Watson et retour à l'étape précédente si nécessaire.

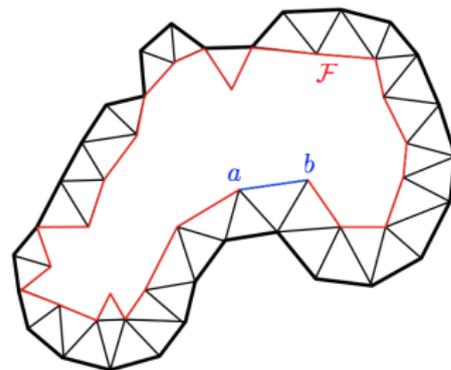


Toutes les étapes peuvent être réalisées en 3d.

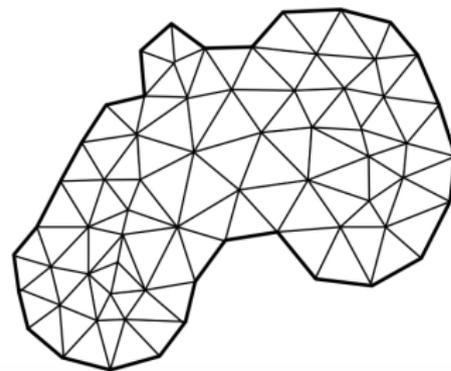
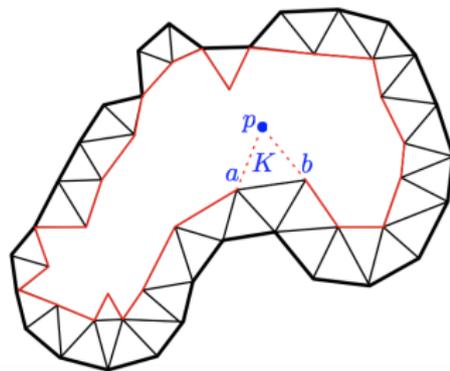
## Autre technique de maillage : Avancée de Front (1/2)



(a)

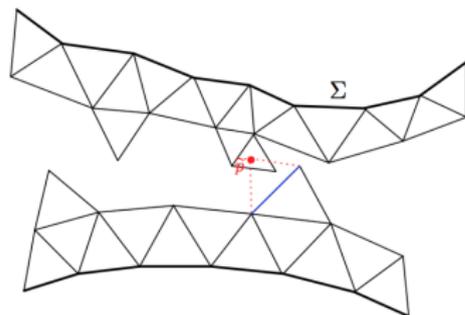


(b)



# Autre technique de maillage : Avancée de Front (2/2)

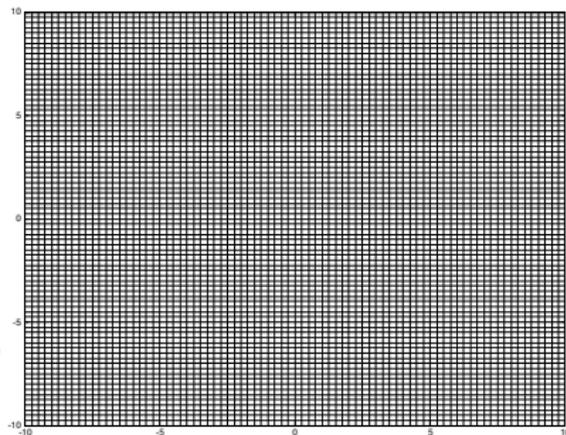
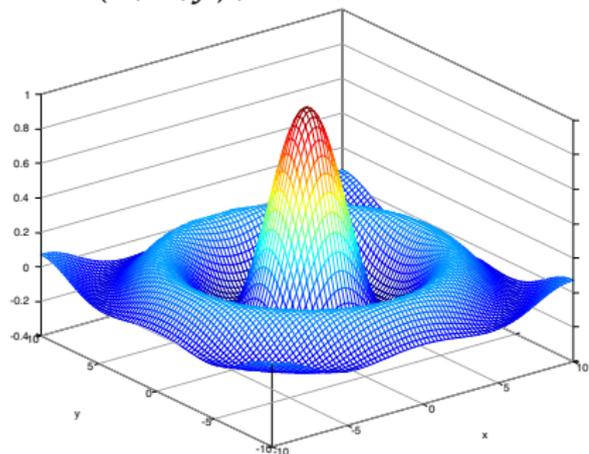
## ...Limitations



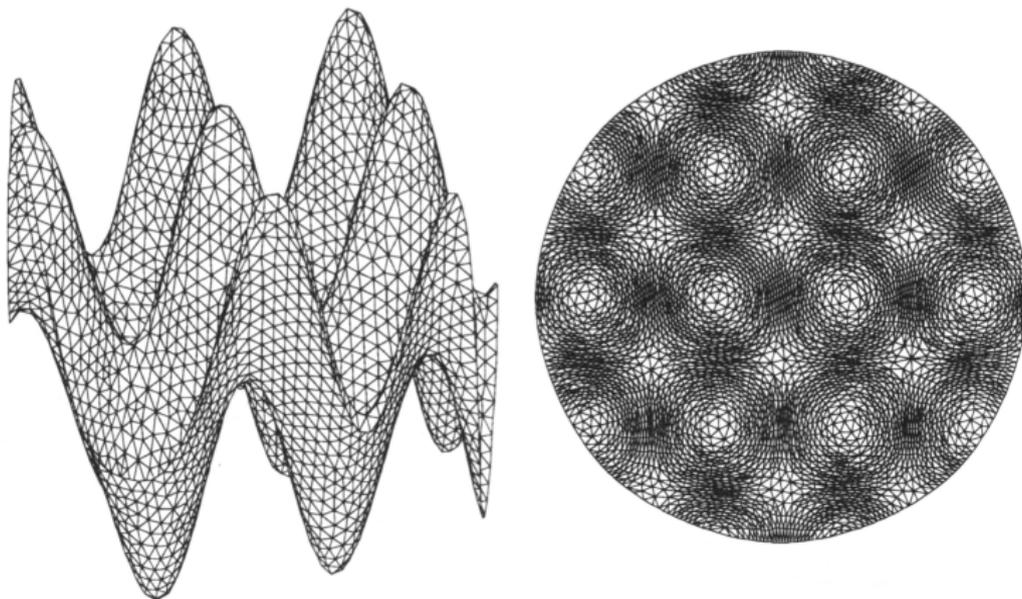
C. Dapogny, Thèse de Doctorat, Shape optimization, level set methods on unstructured meshes and mesh evolution

# Mailler une surface paramétrée (avec Matlab/GNU Octave)

```
[X, Y] = meshgrid(-10 : 0.25 : 10, -10 : 0.25 : 10);  
f = sinc(((X/pi)^2 + (Y/pi)^2)^(1/2));  
h = figure();  
mesh(X, Y, f);
```

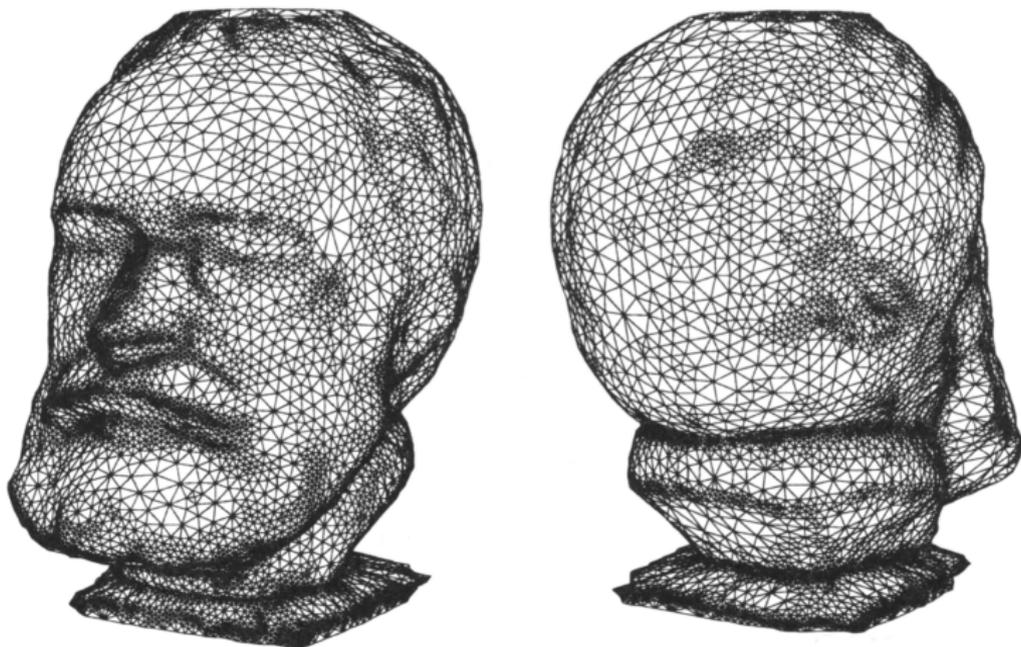


# Mailler une surface paramétrée



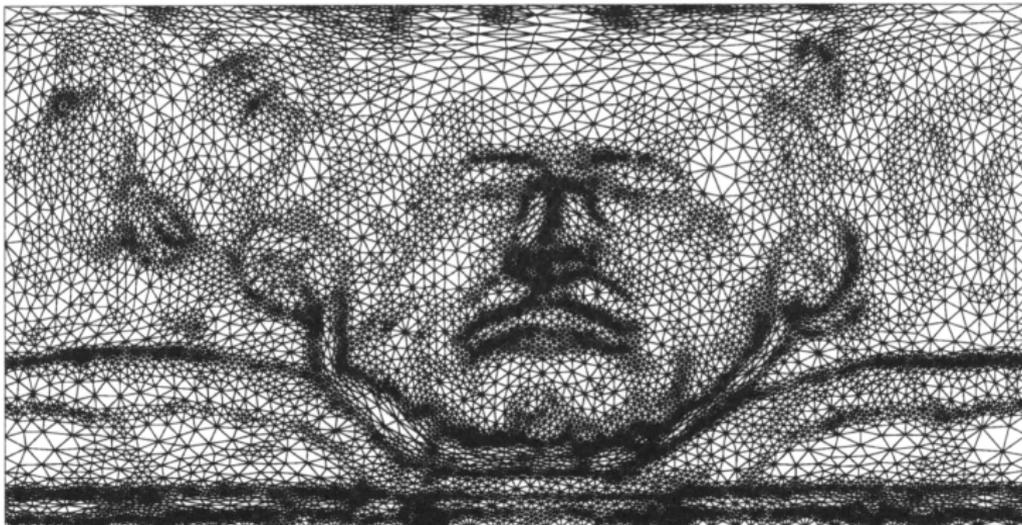
Houman Borouchaki, Paul Louis George, Maillage de surfaces paramétriques. Partie II : Exemples d'applications, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, Volume 324, Issue 8, 1997, Pages 927-931, ISSN 0764-4442, [http://dx.doi.org/10.1016/S0764-4442\(97\)86970-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0764-4442(97)86970-4).

# Mailler une surface paramétrée



Houman Borouchaki, Paul Louis George, Maillage de surfaces paramétriques. Partie II : Exemples d'applications, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, Volume 324, Issue 8, 1997, Pages 927-931, ISSN 0764-4442, [http://dx.doi.org/10.1016/S0764-4442\(97\)86970-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0764-4442(97)86970-4).

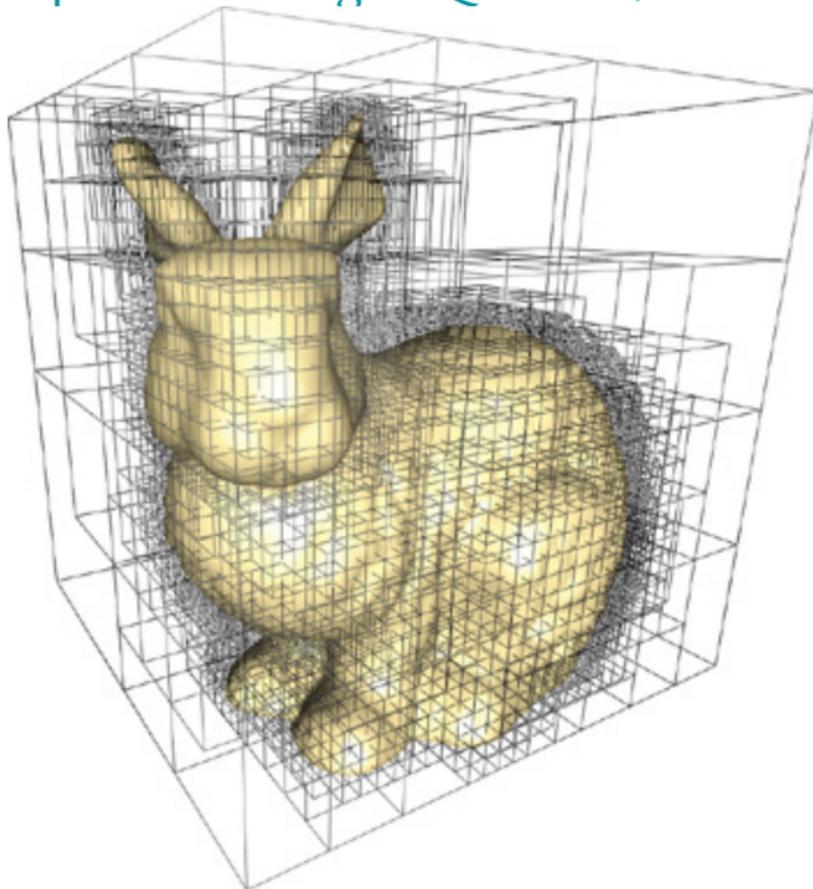
# Mailler une surface paramétrée



Houman Borouchaki, Paul Louis George, Maillage de surfaces paramétriques. Partie II : Exemples d'applications, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, Volume 324, Issue 8, 1997, Pages 927-931, ISSN 0764-4442, [http://dx.doi.org/10.1016/S0764-4442\(97\)86970-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0764-4442(97)86970-4).

Le maillage est quasi-régulier pour une certaine métrique induite par la surface (liée à la courbure par ex.)

## Autre technique de maillage : Quadtree/Octree



# Mailler pose beaucoup de problèmes d'implémentation (en voici juste quelques exemples)

1. Beaucoup de données à gérer
  - ▶ Imaginer juste un cube maillé avec  $100 \times 100 \times 100$  éléments.
2. Structure de donnée très importante.
  - ▶ Pour la recherche de voisins par exemple,
  - ▶ sur ce point avantage aux maillages structurés.
3. Calcul des centres de cercles circonscrits (etc ...) génèrent des erreurs numériques.
  - ▶ Que faire si la cavité dans l'algorithme de Bowyer-Watson n'est pas étoilée ?
4. Calcul des normales aux surfaces.
5. Recours parfois forcé aux heuristiques.
  - ▶ Problème du forçage des bords des maillages.
6. Choix des cartes de taille de maille.
7. Possibilité de mailler en parallèle ?

# Exemple de logiciel de maillage : Gmsh (1/2)

## développé par C. Geuzaine et J.-F. Remacle

Gmsh is copyright (C) 1997-2016 by C. Geuzaine and J.-F. Remacle (see the CREDITS file for more information) and is distributed under the terms of the GNU General Public License (GPL) (version 2 or later, with an exception to allow for easier linking with external libraries). In short, this means that everyone is free to use Gmsh and to redistribute it on a free basis. Gmsh is not in the public domain; it is copyrighted and there are restrictions on its distribution (see the license and the related frequently asked questions). For example, you cannot integrate this version of Gmsh (in full or in parts) in any closed-source software you plan to distribute (commercially or not).

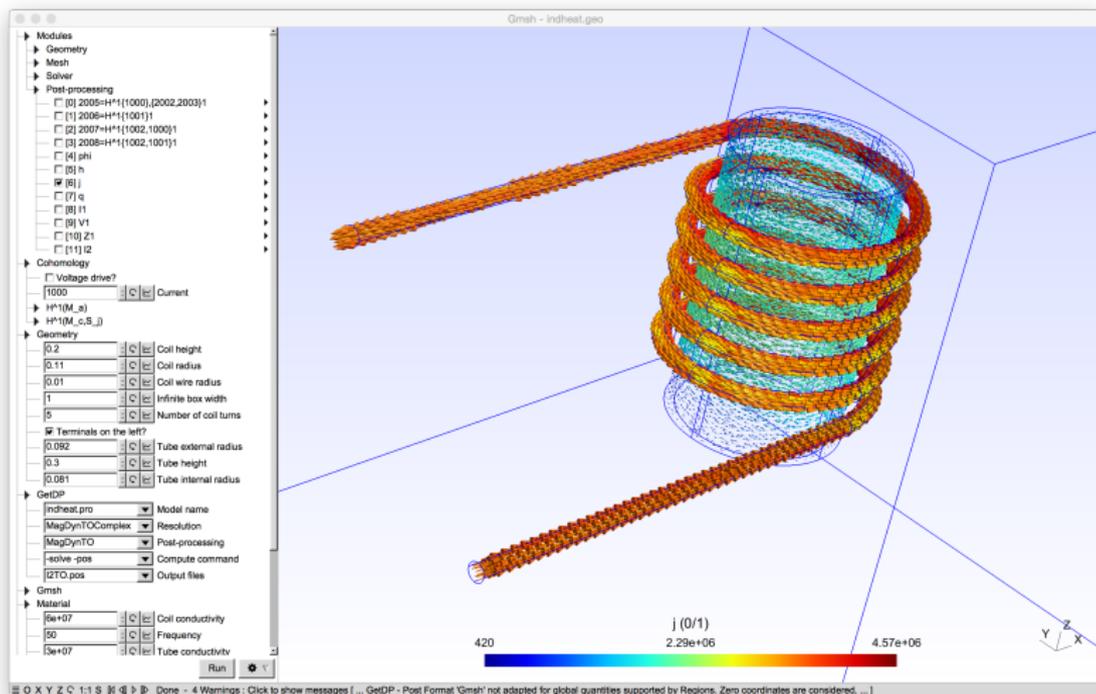
### Ne pas confondre :

- ▶ Logiciel **libre** (ou open source)/privateur (ou propriétaire).
- ▶ Logiciel gratuit/payant.

Voir [exemple1.geo](#) (input) et [exemple1.msh](#) (output).  
Étudier la structure de données du maillage.

# Exemple de logiciel de maillage : Gmsh (2/2)

## développé par C. Geuzaine et J.-F. Remacle



**1** Définitions

**2** Triangulation de Delaunay

**3** Mailler

**4** Remailler



**Remailler**

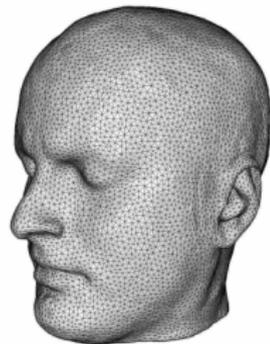
# Remailler pour améliorer la régularité du maillage : lissage



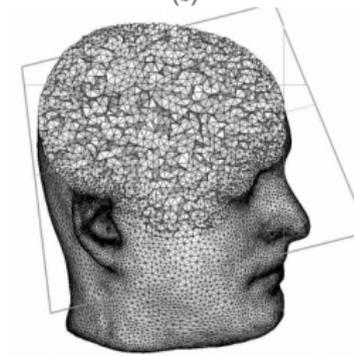
(a)



(b)



(c)

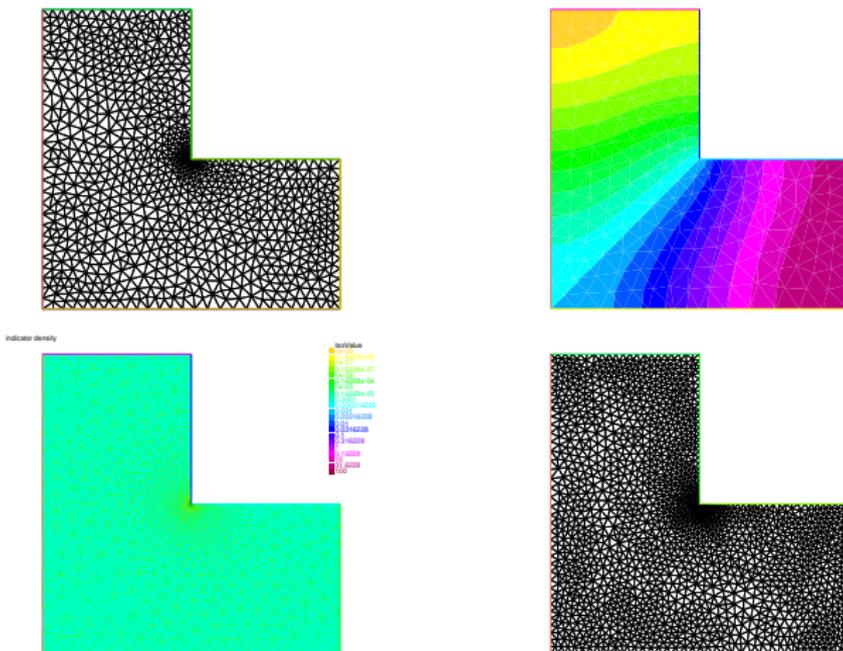


(d)



Maya De Buhan, Pascal Frey. Modelling and simulation of the nonlinear viscoelastic behavior of brain structures on complex domains. 2010. <hal-00472813>

# Remailler pour améliorer la solution (Freefem++)



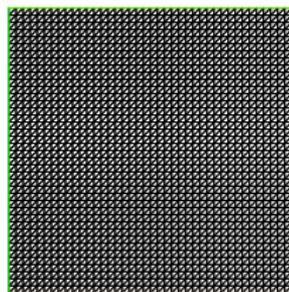
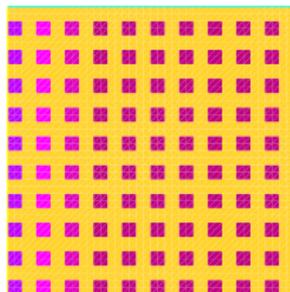
Adaptation du maillage avec une carte de taille basée sur :

- ▶ La solution (par exemple son gradient),
- ▶ Mieux : une estimation a posteriori (cf. le cours de Y. Mesri).

Exécuter les fichiers `adaptindicatorP1.edp` et `adaptindicatorP2.edp` avec Freefem++

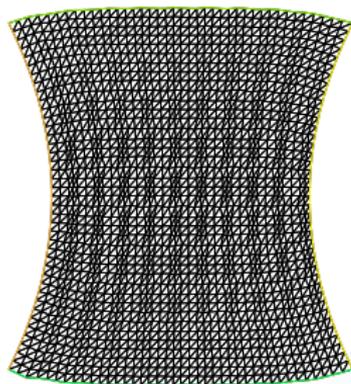
# Remailler pour mettre à jour la géométrie (1/2)

## exemple avec Freefem++

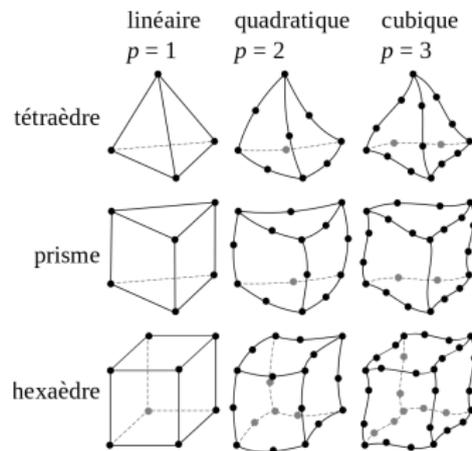


- ▶ Problème d'élasticité linéaire résolu avec Freefem++,
- ▶ Matériau mou (jaune) avec inclusions rigides.

- ▶ Comme l'inconnue est un déplacement on peut l'appliquer au maillage pour visualiser la solution.
- ▶ Impérativement tester la validité du maillage résultant.
- ▶ Si besoin en générer un nouveau.

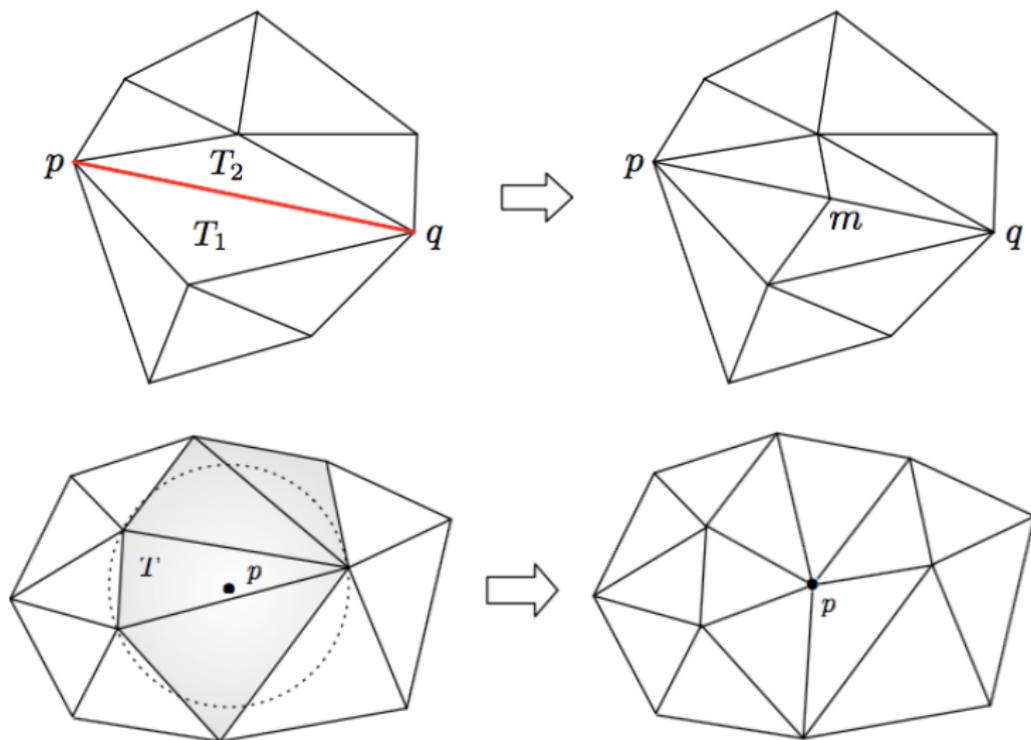


## Remailler pour mettre à jour la géométrie (2/2)

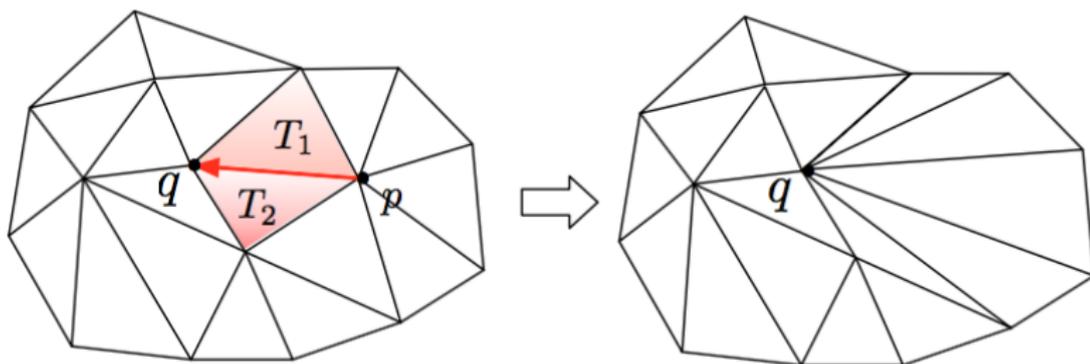


- ▶ Ensuite il faut réinterpoler sur les fonctions de base de la CAO,
- ▶ ou utiliser des éléments isogéométriques...

# Techniques de remaillage (1/4) : Raffinement

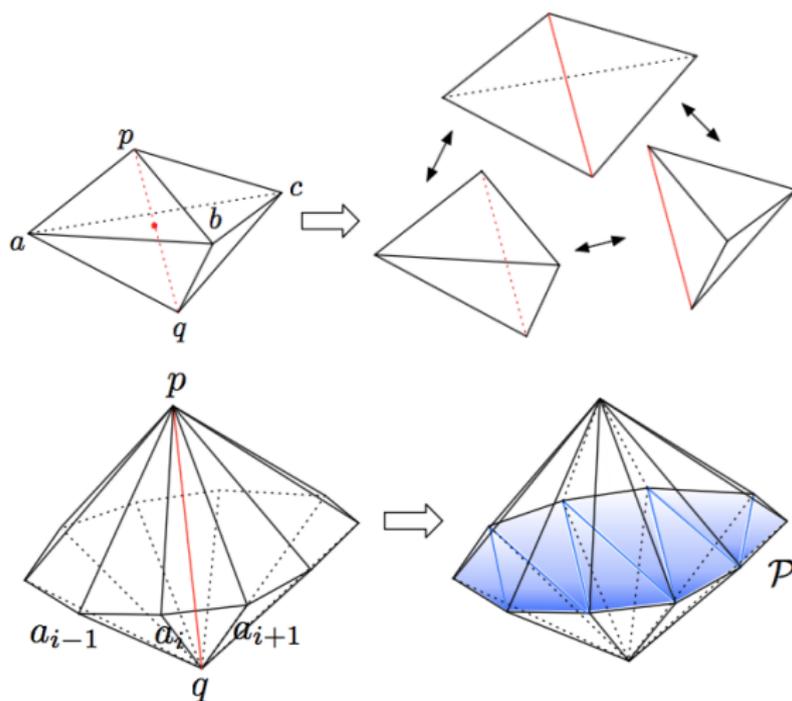


## Techniques de remaillage (2/4) : Déraffinement

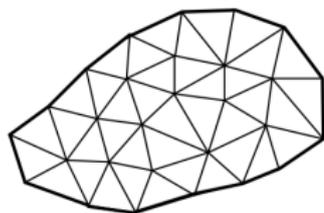


C. Dapogny, Thèse de Doctorat, Shape optimization, level set methods on unstructured meshes and mesh evolution

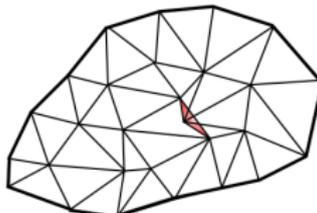
# Techniques de remaillage (3/4) : Basculement



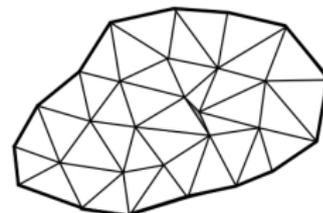
# Techniques de remaillage (4/4) : Translation



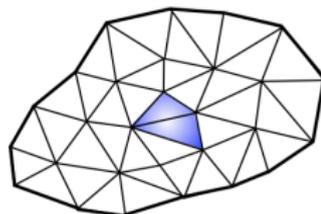
(a)



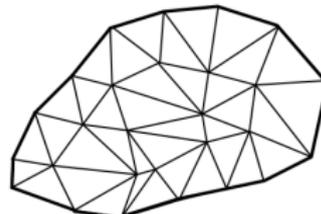
(b)



(c)



(d)



(e)



C. Dapogny, Thèse de Doctorat, Shape optimization, level set methods on unstructured meshes and mesh evolution

Encore beaucoup de sujets à explorer :



**Pascal Frey et Paul-Louis George.**  
**Maillages. Hermes, 1999.**