Introduction aux méthodes de décomposition de domaine

Nicole Spillane (CMAP, École Polytechnique)

4 Novembre 2017 – Groupe de travail numérique du CMAP

Contents

Pourquoi décomposer le domaine ?

- Résolution de problèmes multiphysiques (couplage)

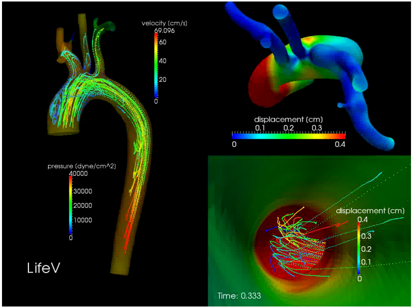


Image: A. Quarteroni

https://cmcs.epfl.ch/methodologies/fsialgorithms

- Résolution de problèmes sur des architectures de calcul parallèle:
  - permet de résoudre des problèmes de plus en plus gros,
  - permet de résoudre le même problème de plus en plus vite.

Les architectures parallèles sont devenues le paradigme dominant pour tous les ordinateurs.

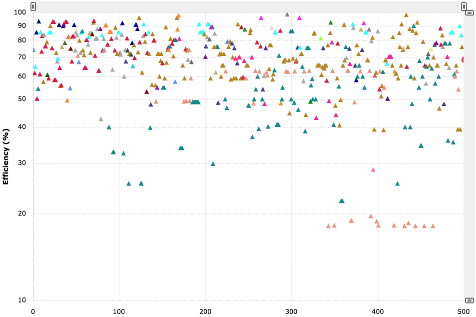
Grappe de calcul Hopper (Cluster de calcul commun des laboratoires CPHT, CMLS, CMAP, PMC, LCM, LPP).

Sur ce sujet, voir l'exposé de Jack Dongarra au CEMRARCS 2016
`http://smai.emath.fr/cemracs/cemracs16/programme.php`

Efficacité: $\frac{R_{\text{max}}}{R_{\text{peak}}}$ des ordinateurs du TOP500

- R_{max}: Meilleure performance mesurée pour LINPACK
- R_{peak}: Performance théorique de pointe

mesurées en flops (floating-point operation per second) ou plutôt en pétaflops (10^{15} flops).

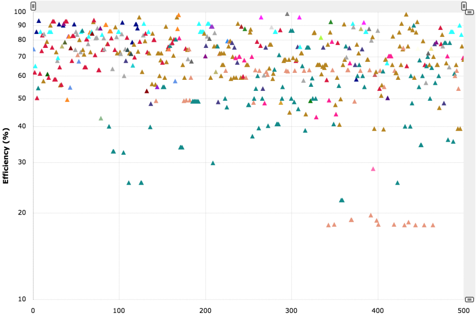


https://www.top500.org/statistics/efficiency-power-cores/

Efficacité: $\frac{R_{\text{max}}}{R_{\text{peak}}}$ des ordinateurs du TOP500

- R_{max}: Meilleure performance mesurée pour LINPACK
- R_{peak}: Performance théorique de pointe

mesurées en flops (floating-point operation per second) ou plutôt en pétaflops (10^{15} flops).



https://www.top500.org/statistics/efficiency-power-cores/

Dans la vie courante: efficacité plutôt autour de 20–30%.

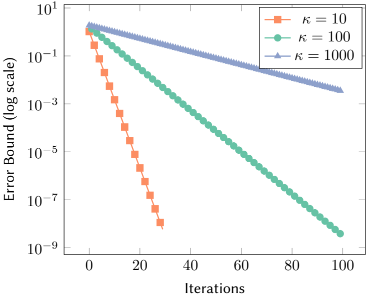
Il n'est pas suffisant d'acheter un supercalculateur

Les algorithmes doivent être adaptés au calcul massivement parallèle…

…comme le sont les algorithmes de décomposition de domaine.

Solveurs linéaires parallèles ($\mathbf{K}\mathbf{u}_* = \mathbf{f}$ avec $\mathbf{K}$ spd)

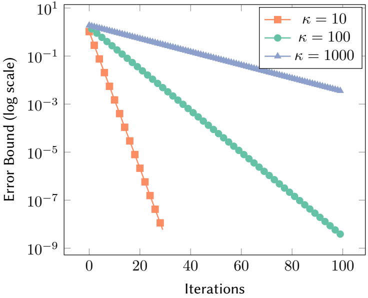
1. Les solveurs directs sont robustes (mais coûteux en mémoire et difficilement parallélisables).
   par ex. : factorisation de Cholesky puis remontée descente.
   $$\left(\mathbf{K}\right) = \left(\mathbf{L}\right)\left(\mathbf{L}^\top\right) \qquad \left(\mathbf{u}_*\right) = \left(\mathbf{L}^\top\right) \backslash \left(\mathbf{L}\right) \backslash \left(\mathbf{f}\right)$$
2. Les solveurs linéaires sont naturellement parallèles (mais peu robustes)
   par ex. : Gradient Conjugué Préconditionné (PCG)



$$\frac{\|\mathbf{u}_* - \mathbf{u}_m\|_{\mathbf{K}}}{\|\mathbf{u}_* - \mathbf{u}_0\|_{\mathbf{K}}} \leqslant 2\left[\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right]^m, \quad \kappa = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}.$$

Solveurs linéaires parallèles ($\mathbf{K}\mathbf{u}_* = \mathbf{f}$ avec $\mathbf{K}$ spd)

1. Les solveurs directs sont robustes (mais coûteux en mémoire et difficilement parallélisables).
   par ex. : factorisation de Cholesky puis remontée descente.
   $$\left(\mathbf{K}\right) = \left(\mathbf{L}\right)\left(\mathbf{L}^\top\right) \qquad \left(\mathbf{u}_*\right) = \left(\mathbf{L}^\top\right)\backslash\left(\mathbf{L}\right)\backslash\left(\mathbf{f}\right)$$
2. Les solveurs linéaires sont naturellement parallèles (mais peu robustes)
   par ex. : Gradient Conjugué Préconditionné (PCG)



$$\frac{\|\mathbf{u}_* - \mathbf{u}_m\|_{\mathbf{K}}}{\|\mathbf{u}_* - \mathbf{u}_0\|_{\mathbf{K}}} \leqslant 2\left[\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right]^m, \quad \kappa = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}.$$

Solveur hybride **Direct/Itératif** pour être à la fois **robuste** et **facilement parallélisable**.

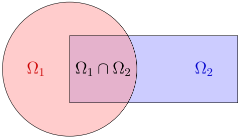
$\rightarrow$ Décomposition de domaine

Cas à 2 sous domaines: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Problème modèle: problème scalaire elliptique d'ordre 2

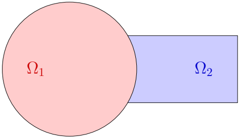
$\mathcal{L}u := (\eta - \Delta)u = f$ dans Ω, avec des conditions aux limites.

DD avec recouvrement (Schwarz 1869)



$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_1 &= f, \text{ dans } \Omega_1 \\ \mathcal{L}u_2 &= f, \text{ dans } \Omega_2 \\ u_1 &= u_2, \text{ sur } \partial\Omega_1 \cap \Omega 2 \\ u_2 &= u_1, \text{ sur } \partial\Omega_2 \cap \Omega 1 \end{aligned}$$

DD sans recouvrement (Przemieniecki 1963)



$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_1 &= f, \text{ dans } \Omega_1 \\ \mathcal{L}u_2 &= f, \text{ dans } \Omega_2 \\ u_1 &= u_2, \text{ sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega 2 \\ \partial_n u_1 &= \partial_n u_2, \text{ sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega 1 \end{aligned}$$

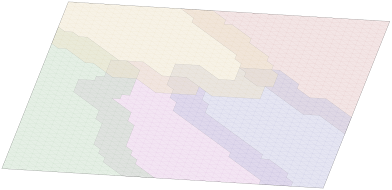
Solution globale: $u_{|\Omega_1} = u_1$ et $u_{|\Omega_2} = u_2$.

Cas à 2 sous domaines: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

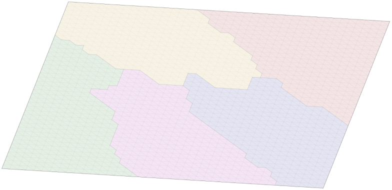
Problème modèle: problème scalaire elliptique d'ordre 2

$\mathcal{L}u := (\eta - \Delta)u = f$ dans Ω, avec des conditions aux limites.

DD avec recouvrement (Schwarz 1869)



DD sans recouvrement (Przemieniecki 1963)



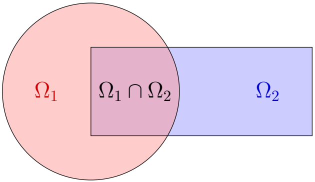
Se généralise facilement à $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_N$.

Contents

La première méthode de Schwarz (H.A. Schwarz, 1870)

$\mathcal{L}u := (\eta - \Delta)u = f$ dans Ω

- avec des conditions aux limites qui rendent le problème bien posé,
- où $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$ **avec recouvrement**.



On construit une suite d'approximations $(u^i)_{i \geqslant 0}$ telle que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u^{i+1/2} &= f && \text{dans } \Omega_1 \\ u^{i+1/2} &= u^i && \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \overline{\Omega_2} \\ u^{i+1/2} &= u^i && \text{dans } \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u^{i+1} &= f && \text{dans } \Omega_2 \\ u^{i+1} &= u^{i+1/2} && \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \overline{\Omega_1} \\ u^{i+1} &= u^{i+1/2} && \text{dans } \Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2}. \end{aligned}$$

L'algorithme converge vers la solution du problème de départ:

$$u^i \to u \text{ quand } i \to \infty.$$

Discrétisation: exemple des éléments finis

Espaces d'éléments finis

- Global $V_h = \text{Vect}\left\{\phi_k : k = 1, \dots, n\right\}$
- Local $V_h(\Omega_s) = \text{Vect}\left\{\phi_{k|\Omega_s} : \text{supp}(\phi_k) \subset \overline{\Omega}_s\right\}$

Notion de recouvrement minimal:

$$\forall\, k = 1, \dots, n,\ \exists s \text{ tel que } \text{supp}(\phi_k) \subset \overline{\Omega}_s$$

Opérateurs d'interpolation

- Global à Local $R_s :\ V_h \to V_h(\Omega_s)$ (Restriction)
- Local à Global $R_s^T :\ V_h(\Omega_s) \to V_h$ (Prolongement)

Matrices

- $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n\times n}; \quad K_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$
- $\mathbf{K}_s = \mathbf{R}_s \mathbf{K} \mathbf{R}_s^\top$

Discrétisation: un exemple

$$
\begin{array}{rl}
\Omega = & [\quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad] \\
\Omega_1 = & [\quad x \quad x \quad x \quad x \quad \quad \quad] \\
\Omega_2 = & [\quad \quad \quad \quad x \quad x \quad x \quad]
\end{array}
$$

Discrétisation: un exemple

$$
\begin{array}{rl}
\Omega = & [\ x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x\ ] \\
\Omega_1 = & [\ x \quad x \quad x \quad x \qquad\qquad\ \ ] \\
\Omega_2 = & [\ \qquad\qquad\qquad x \quad x \quad x\ ]
\end{array}
$$

$$
\mathbf{R}_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Discrétisation: un exemple

$$
\begin{array}{rcccccccc}
\Omega = & [& x & x & x & x & x & x &] \\
\Omega_1 = & [& x & x & x & x & & &] \\
\Omega_2 = & [& & & & x & x & x &]
\end{array}
$$

$$
\mathbf{R}_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = \mathbf{R}_1 \mathbf{A} \mathbf{R}_1^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} & a_{34} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}
$$

Discrétisation: un exemple

$$
\begin{array}{rcl}
\Omega = & [& x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \;] \\
\Omega_1 = & [& x \quad x \quad x \quad x \quad \;] \\
\Omega_2 = & [& \quad x \quad x \quad x \;]
\end{array}
$$

$$
\mathbf{R}_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = \mathbf{R}_1 \mathbf{A} \mathbf{R}_1^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} & a_{34} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}
$$

$$
\text{If } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}
$$

Discrétisation: un exemple

$$\begin{array}{rcl} \Omega & = & [\ x\ \ x\ \ x\ \ x\ \ x\ \ x\ ] \\ \Omega_1 & = & [\ x\ \ x\ \ x\ \ x\ \ ] \\ \Omega_2 & = & [\ \ \ x\ \ x\ \ x\ ] \end{array}$$

$$\mathbf{R}_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = \mathbf{R}_1 \mathbf{A} \mathbf{R}_1^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} & a_{34} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\text{If } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} \quad \text{alors } \mathbf{u}_1 = \mathbf{R}_1 \, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

Discrétisation: un exemple

$$\begin{array}{rcl}
\Omega = & [& x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \;] \\
\Omega_1 = & [& x \quad x \quad x \quad x \quad \;] \\
\Omega_2 = & [& x \quad x \quad x \;]
\end{array}$$

$$\mathbf{R}_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = \mathbf{R}_1 \mathbf{A} \mathbf{R}_1^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} & a_{34} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$$

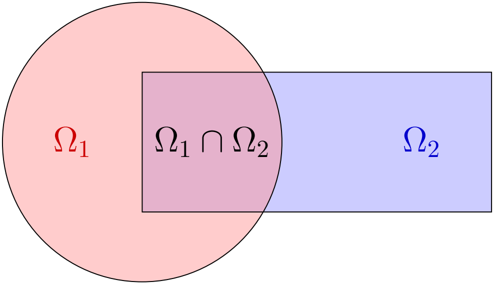
$$\text{If } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} \quad \text{alors } \mathbf{u}_1 = \mathbf{R}_1 \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad \text{et } \mathbf{R}_1^\top \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Version discrète de la première méthode de Schwarz

Rappel de l'algorithme (version discrétisée: u_h, u_h^i, $f_h \in V_h$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_h^{i+1/2} &= f_h && \text{dans } \Omega_1 \\ u_h^{i+1/2} &= u_h^i && \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \overline{\Omega_2} \\ u_h^{i+1/2} &= u_h^i && \text{dans } \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_h^{i+1} &= f_h && \text{dans } \Omega_2 \\ u_h^{i+1} &= {u_h}^{i+1/2} && \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \overline{\Omega_1} \\ u_h^{i+1} &= u_h^{i+1/2} && \text{dans } \Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2}. \end{aligned}$$

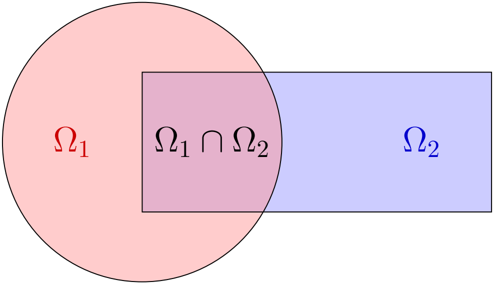


Version discrète de la première méthode de Schwarz

Rappel de l'algorithme (version discrétisée: u_h, u_h^i, $f_h \in V_h$)

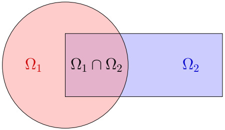
$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_h^{i+1/2} &= f_h = \mathcal{L}u_h && \text{dans } \Omega_1 \\ u_h^{i+1/2} &= u_h^i && \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \overline{\Omega_2} \\ u_h^{i+1/2} &= u_h^i && \text{dans } \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_h^{i+1} &= f_h = \mathcal{L}u_h && \text{dans } \Omega_2 \\ u_h^{i+1} &= {u_h}^{i+1/2} && \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \overline{\Omega_1} \\ u_h^{i+1} &= u_h^{i+1/2} && \text{dans } \Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2}. \end{aligned}$$



Version algébrique de $u^i \to u^{i+1/2}$ ($\mathcal{L}u_h = f_h \Leftrightarrow \mathbf{Ku} = \mathbf{f}$)

Rappel:

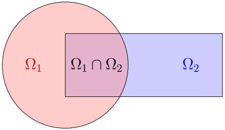


- $V_h(\Omega_s) = \mathrm{Vect}\left\{\phi_{k|\Omega_s} : \mathrm{supp}(\phi_k) \subset \overline{\Omega}_s\right\}$
- $R_s : \; V_h \to V_h(\Omega_s)$ (Restriction)
- $R_s^T : \; V_h(\Omega_s) \to V_h$ (Prolongement)

$$\begin{array}{c} \mathcal{L}u_h^{i+1/2} = \mathcal{L}u_h, \; \Omega_1 \\ (u_h^{i+1/2} - u_h^i) = 0, \; \partial\Omega_1 \cap \overline{\Omega_2} \\ u_h^{i+1/2} - u_h^i = 0, \; \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \mathbf{R}_1\mathbf{K}\mathbf{u}^{i+1/2} = \mathbf{R}_1\mathbf{K}\mathbf{u} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{R}_1^\top \mathbf{R}_1)(\mathbf{u}^{i+1/2} - \mathbf{u}^i) = \mathbf{0} \end{array}$$

Version algébrique de $u^i \to u^{i+1/2}$ ($\mathcal{L}u_h = f_h \Leftrightarrow \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$)

Rappel:

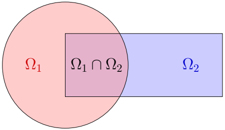


- $V_h(\Omega_s) = \mathrm{Vect}\left\{\phi_{k|\Omega_s} : \mathrm{supp}(\phi_k) \subset \overline{\Omega}_s\right\}$
- $R_s : \; V_h \to V_h(\Omega_s)$ (Restriction)
- $R_s^T : \; V_h(\Omega_s) \to V_h$ (Prolongement)

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{L}u_h^{i+1/2} = \mathcal{L}u_h, \; \Omega_1 \\ (u_h^{i+1/2} - u_h^i) = 0, \; \partial\Omega_1 \cap \overline{\Omega_2} \\ u_h^{i+1/2} - u_h^i = 0, \; \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathbf{R}_1\mathbf{K}(\mathbf{u}^{i+1/2} - \mathbf{u}^i) = \mathbf{R}_1\mathbf{K}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^i) \\ (\mathbf{I} - \mathbf{R}_1^\top \mathbf{R}_1)(\mathbf{u}^{i+1/2} - \mathbf{u}^i) = \mathbf{0} \end{array}$$

Version algébrique de $u^i \to u^{i+1/2}$ ($\mathcal{L}u_h = f_h \Leftrightarrow \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$)

Rappel:



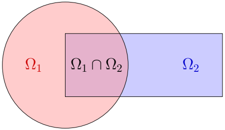
- $V_h(\Omega_s) = \text{Vect}\left\{\phi_{k|\Omega_s} : \text{supp}(\phi_k) \subset \overline{\Omega}_s\right\}$
- $R_s : \ V_h \to V_h(\Omega_s)$ (Restriction)
- $R_s^T : \ V_h(\Omega_s) \to V_h$ (Prolongement)

$$\begin{array}{c} \mathcal{L}u_h^{i+1/2} = \mathcal{L}u_h,\ \Omega_1 \\ (u_h^{i+1/2} - u_h^i) = 0,\ \partial\Omega_1 \cap \overline{\Omega_2} \\ u_h^{i+1/2} - u_h^i = 0,\ \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \mathbf{R}_1\mathbf{K}(\mathbf{u}^{i+1/2} - \mathbf{u}^i) = \mathbf{R}_1\mathbf{K}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^i) \\ (\mathbf{I} - \mathbf{R}_1^\top\mathbf{R}_1)(\mathbf{u}^{i+1/2} - \mathbf{u}^i) = \mathbf{0} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \mathbf{R}_1\mathbf{K}(\mathbf{R}_1^\top\mathbf{R}_1)(\mathbf{u}^{i+1/2} - \mathbf{u}^i) = \mathbf{R}_1\mathbf{K}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^i) \\ (\mathbf{I} - \mathbf{R}_1^\top\mathbf{R}_1)(\mathbf{u}^{i+1/2} - \mathbf{u}^i) = \mathbf{0} \end{array}$$

Version algébrique de $u^i \to u^{i+1/2}$ ($\mathcal{L}u_h = f_h \Leftrightarrow \mathbf{Ku} = \mathbf{f}$)

Rappel:



- $V_h(\Omega_s) = \mathrm{Vect}\left\{\phi_{k|\Omega_s} : \mathrm{supp}(\phi_k) \subset \overline{\Omega}_s\right\}$
- $R_s : \ V_h \to V_h(\Omega_s)$ (Restriction)
- $R_s^T : \ V_h(\Omega_s) \to V_h$ (Prolongement)

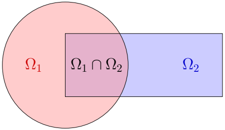
$$\begin{array}{c} \mathcal{L}u_h^{i+1/2} = \mathcal{L}u_h,\ \Omega_1 \\ (u_h^{i+1/2} - u_h^i) = 0,\ \partial\Omega_1 \cap \overline{\Omega_2} \\ u_h^{i+1/2} - u_h^i = 0,\ \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathbf{R}_1\mathbf{K}(\mathbf{u}^{i+1/2} - \mathbf{u}^i) = \mathbf{R}_1\mathbf{K}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^i) \\ (\mathbf{I} - \mathbf{R}_1^\top \mathbf{R}_1)(\mathbf{u}^{i+1/2} - \mathbf{u}^i) = \mathbf{0} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathbf{R}_1\mathbf{K}(\mathbf{R}_1^\top \mathbf{R}_1)(\mathbf{u}^{i+1/2} - \mathbf{u}^i) = \mathbf{R}_1\mathbf{K}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^i) \\ (\mathbf{I} - \mathbf{R}_1^\top \mathbf{R}_1)(\mathbf{u}^{i+1/2} - \mathbf{u}^i) = \mathbf{0} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathbf{R}_1(\mathbf{u}^{i+1/2} - \mathbf{u}^i) = (\mathbf{R}_1\mathbf{K}\mathbf{R}_1^\top)^{-1}\mathbf{R}_1\mathbf{K}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^i) \\ (\mathbf{I} - \mathbf{R}_1^\top \mathbf{R}_1)(\mathbf{u}^{i+1/2} - \mathbf{u}^i) = \mathbf{0} \end{array}$$

Version algébrique de $u^i \to u^{i+1/2}$ ($\mathcal{L}u_h = f_h \Leftrightarrow \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$)

Rappel:



- $V_h(\Omega_s) = \mathrm{Vect}\left\{\phi_{k|\Omega_s} : \mathrm{supp}(\phi_k) \subset \overline{\Omega_s}\right\}$
- $R_s : \ V_h \to V_h(\Omega_s)$ (Restriction)
- $R_s^T : \ V_h(\Omega_s) \to V_h$ (Prolongement)

$$\begin{array}{c} \mathcal{L}u_h^{i+1/2} = \mathcal{L}u_h,\ \Omega_1 \\ (u_h^{i+1/2} - u_h^i) = 0,\ \partial\Omega_1 \cap \overline{\Omega_2} \\ u_h^{i+1/2} - u_h^i = 0,\ \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathbf{R}_1\mathbf{K}(\mathbf{u}^{i+1/2} - \mathbf{u}^i) = \mathbf{R}_1\mathbf{K}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^i) \\ (\mathbf{I} - \mathbf{R}_1^\top\mathbf{R}_1)(\mathbf{u}^{i+1/2} - \mathbf{u}^i) = \mathbf{0} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathbf{R}_1\mathbf{K}(\mathbf{R}_1^\top\mathbf{R}_1)(\mathbf{u}^{i+1/2} - \mathbf{u}^i) = \mathbf{R}_1\mathbf{K}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^i) \\ (\mathbf{I} - \mathbf{R}_1^\top\mathbf{R}_1)(\mathbf{u}^{i+1/2} - \mathbf{u}^i) = \mathbf{0} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathbf{R}_1(\mathbf{u}^{i+1/2} - \mathbf{u}^i) = (\mathbf{R}_1\mathbf{K}\mathbf{R}_1^\top)^{-1}\mathbf{R}_1\mathbf{K}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^i) \\ (\mathbf{I} - \mathbf{R}_1^\top\mathbf{R}_1)(\mathbf{u}^{i+1/2} - \mathbf{u}^i) = \mathbf{0} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{u}^{i+1/2} - \mathbf{u} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_1^\top(\mathbf{R}_1\mathbf{K}\mathbf{R}_1^\top)^{-1}\mathbf{R}_1\mathbf{K}\right)(\mathbf{u}^i - \mathbf{u}).$$

Version algébrique de $u^i \to u^{i+1}$ ($\mathcal{L}u_h = f_h \Leftrightarrow \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$)

Méthode de Schwarz, en posant $\mathbf{e}^j = \mathbf{u}^j - \mathbf{u}$,

$$\mathbf{e}^{i+1/2} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_1^\top(\mathbf{R}_1\mathbf{K}\mathbf{R}_1^\top)^{-1}\mathbf{R}_1\mathbf{K}\right)\mathbf{e}^i \qquad \text{projection } K\text{-orth sur } \mathrm{Ker}(\mathbf{R}_1\mathbf{K})$$

$$\mathbf{e}^{i+1} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_2^\top(\mathbf{R}_2\mathbf{K}\mathbf{R}_2^\top)^{-1}\mathbf{R}_2\mathbf{K}\right)\mathbf{e}^{i+1/2} \qquad \text{projection } K\text{-orth sur } \mathrm{Ker}(\mathbf{R}_2\mathbf{K})$$

ou, en combinant les deux étapes, et avec $\mathbf{K}_s = \mathbf{R}_s\mathbf{K}\mathbf{R}_s^\top$,

$$\mathbf{e}^{i+1} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_2^\top\mathbf{K}_2^{-1}\mathbf{R}_2\mathbf{K}\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_1^\top\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{R}_1\mathbf{K}\right)\mathbf{e}^i \text{ (Schwarz Multiplicatif).}$$

Version algébrique de $u^i \to u^{i+1}$ ($\mathcal{L}u_h = f_h \Leftrightarrow \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$)

Méthode de Schwarz, en posant $\mathbf{e}^j = \mathbf{u}^j - \mathbf{u}$,

$$\mathbf{e}^{i+1/2} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_1^\top (\mathbf{R}_1 \mathbf{K} \mathbf{R}_1^\top)^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{K}\right) \mathbf{e}^i \qquad \text{projection } K\text{-orth sur } \mathrm{Ker}(\mathbf{R}_1\mathbf{K})$$

$$\mathbf{e}^{i+1} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_2^\top (\mathbf{R}_2 \mathbf{K} \mathbf{R}_2^\top)^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{K}\right) \mathbf{e}^{i+1/2} \qquad \text{projection } K\text{-orth sur } \mathrm{Ker}(\mathbf{R}_2\mathbf{K})$$

ou, en combinant les deux étapes, et avec $\mathbf{K}_s = \mathbf{R}_s \mathbf{K} \mathbf{R}_s^\top$,

$$\mathbf{e}^{i+1} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_2^\top \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{K}\right) \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_1^\top \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{K}\right) \mathbf{e}^i \text{ (Schwarz Multiplicatif).}$$

$$\mathbf{e}^{i+1} = \prod_{s=1}^{N} \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_s^\top \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{R}_s \mathbf{K}\right) \mathbf{e}^i \text{ (Généralisation à } N \text{ sous domaines).}$$

Version algébrique de $u^i \to u^{i+1}$ ($\mathcal{L}u_h = f_h \Leftrightarrow \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$)

Méthode de Schwarz, en posant $\mathbf{e}^j = \mathbf{u}^j - \mathbf{u}$,

$$\mathbf{e}^{i+1/2} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_1^\top (\mathbf{R}_1 \mathbf{K} \mathbf{R}_1^\top)^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{K}\right) \mathbf{e}^i \qquad \text{projection } K\text{-orth sur } \mathrm{Ker}(\mathbf{R}_1 \mathbf{K})$$

$$\mathbf{e}^{i+1} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_2^\top (\mathbf{R}_2 \mathbf{K} \mathbf{R}_2^\top)^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{K}\right) \mathbf{e}^{i+1/2} \qquad \text{projection } K\text{-orth sur } \mathrm{Ker}(\mathbf{R}_2 \mathbf{K})$$

ou, en combinant les deux étapes, et avec $\mathbf{K}_s = \mathbf{R}_s \mathbf{K} \mathbf{R}_s^\top$,

$$\mathbf{e}^{i+1} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_2^\top \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{K}\right) \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_1^\top \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{K}\right) \mathbf{e}^i \text{ (Schwarz Multiplicatif).}$$

$$\mathbf{e}^{i+1} = \prod_{s=1}^{N} \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_s^\top \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{R}_s \mathbf{K}\right) \mathbf{e}^i \text{ (Généralisation à } N \text{ sous domaines).}$$

L'algorithme de Schwarz multiplicatif est convergent

Soit $\rho = \left\| \prod_{s=1}^{N} \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_s^\top \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{R}_s \mathbf{K}\right) \right\|_{\mathbf{K}}$, on a $0 \leqslant \rho < 1$ et:

$$\|\mathbf{e}^{i+1}\|_{\mathbf{K}} \leqslant \rho \|\mathbf{e}^i\|_{\mathbf{K}} \leqslant \rho^{i+1} \|\mathbf{e}^0\|_{\mathbf{K}}, \text{ c.à.d. } \|\mathbf{e}^{i+1}\| \to 0.$$

Schwarz Additif

Schwarz multiplicatif

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{i+1} &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_2^\top \mathbf{K}_2^{-1}\mathbf{R}_2\mathbf{K}\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_1^\top \mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{R}_1\mathbf{K}\right)\mathbf{e}^i \\ &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_2^\top \mathbf{K}_2^{-1}\mathbf{R}_2\mathbf{K} - \mathbf{R}_1^\top \mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{R}_1\mathbf{K} + \mathbf{R}_2^\top \mathbf{K}_2^{-1}\mathbf{R}_2\mathbf{K}\mathbf{R}_1^\top \mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{R}_1\mathbf{K}\right)\mathbf{e}^i.\end{aligned}$$

Schwarz Additif

Schwarz multiplicatif

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{i+1} &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_2^\top \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{K}\right) \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_1^\top \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{K}\right) \mathbf{e}^i \\
&= \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_2^\top \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{K} - \mathbf{R}_1^\top \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{K} + \underbrace{\mathbf{R}_2^\top \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{K} \mathbf{R}_1^\top \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{K}}_{\text{terme non parallèle}}\right) \mathbf{e}^i.
\end{aligned}$$

Schwarz Additif

Schwarz multiplicatif

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{i+1} &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_2^\top \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{K}\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_1^\top \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{K}\right)\mathbf{e}^i \\ &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_2^\top \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{K} - \mathbf{R}_1^\top \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{K} + \underbrace{\mathbf{R}_2^\top \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{K} \mathbf{R}_1^\top \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{K}}_{\text{terme non parallèle}}\right)\mathbf{e}^i.\end{aligned}$$

Solveur de Schwarz additif

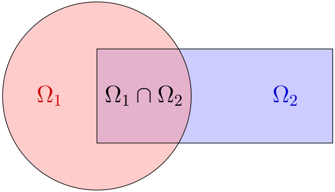
$$\mathbf{e}^{i+1} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_2^\top \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{K} - \mathbf{R}_1^\top \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{K}\right)\mathbf{e}^i.$$

En général cet algorithme n'est pas convergent

- relaxation possible,
- moyennage possible dans le recouvrement (restricted additive Schwarz).

Schwarz Additif: version continue

Cette fois on cherche la version continue de l'algorithme discret



Rappel : Solveur de Schwarz additif

$$\mathbf{e}^{i+1} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_2^\top \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{K} - \mathbf{R}_1^\top \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{K} \right) \mathbf{e}^i.$$

Suite d'approximations $(u_1^i, u_2^i) \in V_h \times V_h$ telle que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} u_1^{i+1} &= f && \text{dans } \Omega_1 & \qquad \mathcal{L} u^{i+1} &= f && \text{dans } \Omega_2 \\ u_1^{i+1} &= u^i && \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \overline{\Omega_2} & \qquad u_2^{i+1} &= u^i && \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \overline{\Omega_1} \\ u_1^{i+1} &= 0 && \text{dans } \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}. & \qquad u_2^{i+1} &= 0 && \text{dans } \Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2}. \end{aligned}$$

$$u^{i+1} = u_1^{i+1} + u_2^{i+1}$$

Schwarz Additif: version préconditioneur

Généralisation à N sous-domaines

$$\mathbf{e}^{i+1} = \left(\mathbf{I} - \sum_{s=1}^{N} \mathbf{R}_s^\top \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{R}_s \mathbf{K} \right) \mathbf{e}^i, \text{ pour } i \geqslant 0.$$

Préconditioneur de Schwarz additif

$$\mathbf{M}_{AS}^{-1} := \sum_{s=1}^{N} \mathbf{R}_s^\top \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{R}_s.$$

Conditionnement de l'opérateur préconditionné

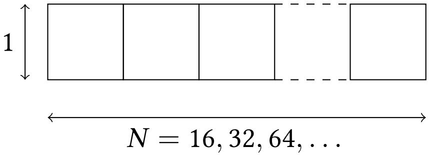
$$\kappa(\mathbf{M}_{AS}^{-1}\mathbf{K}) \leqslant C \frac{1}{\delta H},$$

$\rightarrow$ **algorithme non scalable**

- δ: taille du recouvrement,
- H: taille d'un sous domaine,
- C: constante indépendante de H,δ and h (pas du maillage).

Illustration numérique pour le problème de Poisson $(-\nabla \cdot (\nabla u) = f)$

Domaine unité:
carré de taille 1×1, discrétisé avec 11×11, éléments finis $\mathbb{P}_1$.



Nombre d'itérations pour arriver à convergence

Nombre de sous domaines	16	32	64
Nombre d'itérations – sans espace grossier	35	66	128

Méthode à deux niveaux

Soit $V_H \subset V_h$ un espace, dit *grossier* et $\mathbf{R}_H^\top : V_H \to V_h$ l'opérateur d'interpolation correspondant.

Le problème grossier est $\mathbf{K}_H = \mathbf{R}_H \mathbf{K} \mathbf{R}_H^T$ et

$$\mathbf{M}_{AS,2}^{-1} := \mathbf{R}_H^T \underbrace{\mathbf{K}_H^{-1}}_{\text{solveur grossier}} \mathbf{R}_H + \sum_{s=1}^{N} \mathbf{R}_s^T \underbrace{\mathbf{K}_s^{-1}}_{\text{solveur local}} \mathbf{R}_s.$$

La **grande** question est quels vecteurs mettre dans l'espace grossier V_H?

- si pas les bons vecteurs $\Rightarrow$ pas assez d'information partagée entre sous domaines.
- si trop de vecteurs $\Rightarrow$ le solveur grossier est trop coûteux.

Le choix $V_H = \sum_{s=1}^N \mathbf{R}_s^\top V_H^s$ garantit que le problème grossier $\mathbf{K}_H$ est creux.

Choix de V_H pour le problème de Poisson $-\nabla \cdot (\nabla u) = f$

Espace grossier partition de l'unité

$$V_H := \text{span}\{\mathbf{R}_1^\top \mathbf{D}_1; \dots \mathbf{R}_N^\top \mathbf{D}_N\}$$

où $\mathbf{D}_s$: matrices diagonales telles que $\sum_{s=1}^N \mathbf{R}_s^\top \mathbf{D}_s \mathbf{R}_s = \mathbf{I}$.

Validation numérique

Nombre de sous domaines	16	32	64
Nombre d'itérations – sans espace grossier	35	66	128
Nombre d'itérations – espace grossier standard	27	28	27

Conditionnement de l'opérateur préconditionné

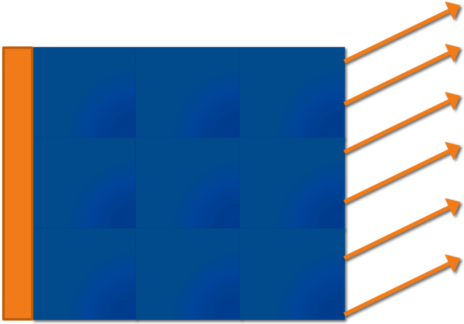
$$\kappa(M_{AS,2}^{-1} A) \leq C \left(1 + \frac{H}{\delta}\right)$$

→ **algorithme scalable**

- δ: taille du recouvrement,
- H: taille d'un sous domaine,
- C: constante indépendante de H,δ and h (pas du maillage).

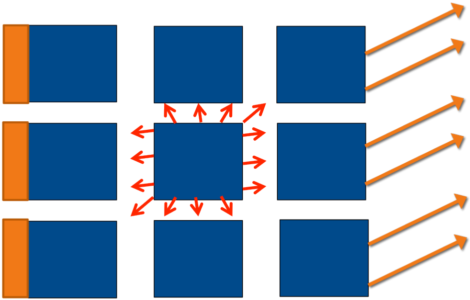
Contents

Exemple: Problème d'élasticité

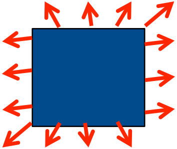


Trouver $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$.

Méthodes de sous structuration



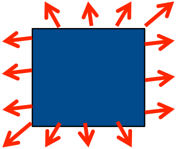
Équilibre local de Ω_s



$$\mathbf{K}_s\mathbf{u}_s = \mathbf{f}_s + \mathbf{g}_s,$$

- $\mathbf{u}_s$: Inconnue locale
- $\mathbf{K}_s$: Matrice problème local
- $\mathbf{f}_s$: Force locale
- $\mathbf{g}_s$: Force d'interface (flèches rouges)

Équilibre local de Ω_s



$$\mathbf{K}_s \mathbf{u}_s = \mathbf{f}_s + \mathbf{g}_s,$$

- $\mathbf{u}_s$: Inconnue locale
- $\mathbf{K}_s$: Matrice problème local
- $\mathbf{f}_s$: Force locale
- $\mathbf{g}_s$: Force d'interface (flèches rouges)

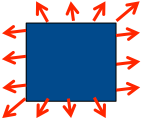
$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_s^{\Gamma\Gamma} & \mathbf{K}_s^{\Gamma I} \\ \mathbf{K}_s^{I\Gamma} & \mathbf{K}_s^{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s^{\Gamma} \\ \mathbf{u}_s^{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_s^{\Gamma} \\ \mathbf{f}_s^{I} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{g}_s^{\Gamma} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (i) \\ (ii) \end{matrix}$$

$$(ii) \Leftrightarrow \mathbf{u}_s^I = \mathbf{K}_s^{II^{-1}}(\mathbf{f}_s^I - \mathbf{K}_s^{I\Gamma}\mathbf{u}_s^{\Gamma})$$

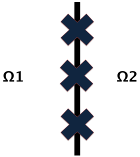
qu'on injecte dans (i) pour obtenir

$$\underbrace{\left(\mathbf{K}_s^{\Gamma\Gamma} - \mathbf{K}_s^{\Gamma I}\mathbf{K}_s^{II^{-1}}\mathbf{K}_s^{I\Gamma}\right)}_{:=\mathbf{S}_s} \mathbf{u}_s^{\Gamma} = \underbrace{\left(\mathbf{f}_s^{\Gamma} - \mathbf{K}_s^{\Gamma I}\mathbf{K}_s^{II^{-1}}\mathbf{f}_s^{I}\right)}_{:=\widetilde{\mathbf{f}_s^{\Gamma}}} + \mathbf{g}_s^{\Gamma}. \qquad (1)$$

Chaque sous domaine Ω_s satisfait



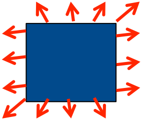
$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathbf{S}_s\mathbf{u}_s^\Gamma & = & \widetilde{\mathbf{f}_s^\Gamma} + {\color{red}\mathbf{g}_s^\Gamma}, & \text{Équilibre de } \Omega_s \\ \sum_{s=1}^N \mathbf{R}_s^\top {\color{red}\mathbf{g}_s^\Gamma} & = & \mathbf{0}, & \text{Équilibre de l'interface} \\ \sum_{s=1}^N \mathbf{B}_s\mathbf{u}_s^\Gamma & = & \mathbf{0}. & \text{Compatibilité de l'Interface} \end{array}\right.$$



- $\mathbf{R}_1^\top \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^1 \\ \mathbf{x}_1^2 \\ \mathbf{x}_1^3 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_2^\top \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2^1 \\ \mathbf{x}_2^2 \\ \mathbf{x}_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^1 + \mathbf{x}_2^1 \\ \mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 \\ \mathbf{x}_1^3 + \mathbf{x}_2^3 \end{pmatrix}$ **assemblage**
- $\mathbf{B}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^1 \\ \mathbf{x}_1^2 \\ \mathbf{x}_1^3 \end{pmatrix} + \mathbf{B}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2^1 \\ \mathbf{x}_2^2 \\ \mathbf{x}_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^1 - \mathbf{x}_2^1 \\ \mathbf{x}_1^2 - \mathbf{x}_2^2 \\ \mathbf{x}_1^3 - \mathbf{x}_2^3 \end{pmatrix}$ **saut**

Méthode de sous structuration (1/2):

BDD – Balancing Domain Decomposition [Mandel]



$$\begin{array}{rcll} \mathbf{S}_s\mathbf{u}_s^\Gamma & = & \widetilde{\mathbf{f}}_s^\Gamma + \mathbf{g}_s^\Gamma, & \text{Équilibre de } \Omega_s \\ \sum_{s=1}^N \mathbf{R}_s^\top \mathbf{g}_s^\Gamma & = & \mathbf{0}, & \text{Équilibre de l'interface} \\ \sum_{s=1}^N \mathbf{B}_s\mathbf{u}_s^\Gamma & = & \mathbf{0}. & \text{Compatibilité de l'interface} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{g}_s^\Gamma & = & \mathbf{S}_s\mathbf{R}_s\hat{\mathbf{u}}^\Gamma - \widetilde{\mathbf{f}}_s^\Gamma, & (i) \\ \sum_{s=1}^N \mathbf{R}_s^\top \mathbf{g}_s^\Gamma & = & \mathbf{0}, & (ii) \\ \mathbf{u}_s^\Gamma & = & \mathbf{R}_s\hat{\mathbf{u}}^\Gamma. & (iii) \end{array}$$

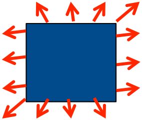
On injecte (i) dans (ii) pour éliminer les forces sur l'interface:

$$\left(\sum_{s=1}^N \mathbf{R}_s^\top \mathbf{S}_s \mathbf{R}_s\right)\hat{\mathbf{u}}^\Gamma = \sum_{s=1}^N \mathbf{R}_s^\top \widetilde{\mathbf{f}}_s^\Gamma,$$

préconditionné par $\mathbf{M}^{-1} := \sum_{s=1}^N \tilde{\mathbf{R}}_s^\top \mathbf{S}_s^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_s$ ($\tilde{\mathbf{R}}_s$: $\mathbf{R}_s$ avec pondéré).

Methode de sous structuration (2/2):

FETI – Finite Element Tearing and Interconnecting [Farhat, Roux]



$$\begin{aligned} \mathbf{S}_s \mathbf{u}_s^\Gamma &= \widetilde{\mathbf{f}}_s^\Gamma + \mathbf{g}_s^\Gamma, && \text{Équilibre de } \Omega_s \\ \sum_{s=1}^N \mathbf{R}_s^\top \mathbf{g}_s^\Gamma &= \mathbf{0}, && \text{Équilibre de l'interface} \\ \sum_{s=1}^N \mathbf{B}_s \mathbf{u}_s^\Gamma &= \mathbf{0}. && \text{Compatibilité de l'interface} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s^\Gamma &= \mathbf{S}_s^{-1} \left(\widetilde{\mathbf{f}}_s^\Gamma + \mathbf{B}_s^\top \boldsymbol{\lambda} \right), && (i) \\ \mathbf{g}_s^\Gamma &= \mathbf{B}_s^\top \boldsymbol{\lambda}, && (ii) \\ \sum_{s=1}^N \mathbf{B}_s \mathbf{u}_s^\Gamma &= \mathbf{0}. && (iii) \end{aligned}$$

On injecte (i) dans (iii) pour éliminer les déplacements à l'interface:

$$\left(\sum_{s=1}^N \mathbf{B}_s \mathbf{S}_s^{-1} \mathbf{B}_s^\top \right) \boldsymbol{\lambda} = - \sum_{s=1}^N \mathbf{B}_s \mathbf{S}_s^{-1} \widetilde{\mathbf{f}}_s^\Gamma .$$

préconditionné par $\mathbf{M}^{-1} := \sum_{s=1}^N \tilde{\mathbf{B}}_s \mathbf{S}_s \tilde{\mathbf{B}}_s^\top$ ($\tilde{\mathbf{B}}_s$: $\mathbf{B}_s$ pondéré).

FETI: prise en compte des modes rigides

Transparent précédent: Trouver $\lambda \in \mathrm{Im}(\mathbf{B})$ tel que

$$\mathbf{M}^{-1}\left(\sum_{s=1}^{N}\mathbf{B}_s\mathbf{S}_s^{-1}\mathbf{B}_s^{\top}\right)\lambda = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{d};\ \begin{cases}\mathbf{S}_s = \mathbf{K}_s^{\Gamma\Gamma} - \mathbf{K}_s^{\Gamma I}\mathbf{K}_s^{II^{-1}}\mathbf{K}_s^{I\Gamma}\\ \mathbf{B}_s : \text{opérateur de saut,}\\ \mathbf{M}^{-1} : \text{préconditionneur.}\end{cases}$$

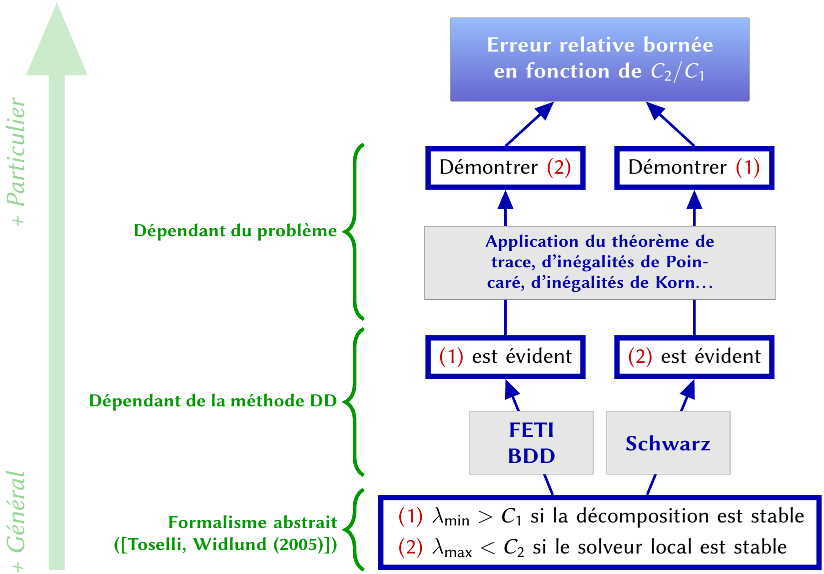
En elasticité $\mathbf{S}_s$ est non inversible: $\mathrm{Ker}(\mathbf{S}_s) = \{\text{modes rigides}\}$.

"Vrai" FETI: Trouver $\lambda \in \mathrm{range}(\mathbf{P}_N)$ tel que

$$\mathbf{P}_N\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}_N^{\top}\left(\sum_{s=1}^{N}\mathbf{B}_s\mathbf{S}_s^{\dagger}\mathbf{B}_s^{\top}\right)\lambda = \mathbf{P}_N\mathbf{M}^{-1}\mathbf{d};\ \begin{cases}\mathbf{P}_N : \text{projection}\\ \mathrm{Ker}(\mathbf{P}_N) = \mathrm{Ker}(\mathbf{S}_s\mathbf{B}_s).\end{cases}$$

Contents

Preuve de convergence et Abstract Schwarz Framework



Contents

Défi 1: Algorithmes pour les architectures très massivement parallèles

Exascale

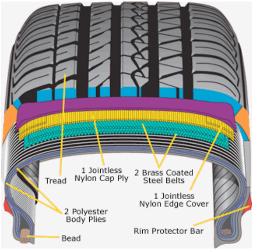
La communauté HPC se prépare pour l'arrivée de machines capables de réaliser 10^{18} opérations par seconde (c.à.d. *exaflop*).

- Pas de produits scalaires $\rightarrow$ pas de Krylov,
- Retour aux solveurs de DD de type de la première méthode de Schwarz,
- Méthodes asynchrones (Frédéric Magoules, Daniel Szyld ...).

Défi 2: Algorithmes robustes et efficaces pour l'utilisation quotidienne

Même sur 1000 cœurs, il y a beaucoup de simulations qui ne convergent pas:

- Problèmes hétérogènes,
  - Espaces Grossiers,
  - Méthodes de Krylov multipréconditionnées.
- Problèmes non spd,
- Élements isogéométriques.



Methode idéale

- Convergence garantie (et indépendante du nombre de sous domaines et des paramètres du problème),
- Peu de paramètres (contrairement au multigrille) $\rightarrow$ Adaptativité,
- Formulation algébrique.

Défi 3: Parallélisme en temps ou en pseudo-temps

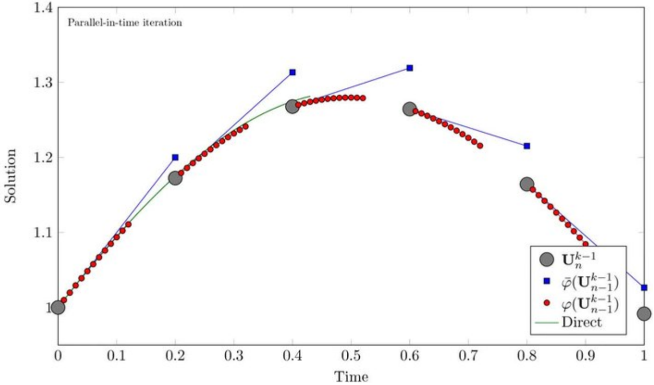


Image: `https://en.wikipedia.org/wiki/Parareal`

Exposé de Martin Gander au CEMRACS 2016:
`http://smai.emath.fr/cemracs/cemracs16/programme.php`

Conclusion

Programme des séances à venir

- Aujourd'hui:
  - François Alouges: Helmholtz.
- Mardi 12 décembre:
  - Loïc Gouarin et Laurent Series: Mise en pratique de la DD avec PETSc
  - Augustin Parret-Fréaud (Safran Tech): La DD dans l'industrie
- Mardi 16 janvier:
  - Caroline Japhet.
  - Martin Gander: Espaces Grossiers.

Ressources

- `http://smai.emath.fr/cemracs/cemracs16/`
- Domain Decomposition Methods: Algorithms and Theory: Olof Widlund et Andrea Toselli.