

## Feuille 1 de travaux dirigés

### Événement, Dénombrement, Probabilité

**Exercice 1.** Trois boules sont tirées successivement d'une urne contenant des boules blanches et des boules rouges. Soient les événements :

$B_1$  : "la 1-ère boule est blanche",  $B_2$  : "la 2-ième boule est blanche",  $B_3$  : "la 3-ième boule est blanche".

Exprimer les événements suivants en fonction de  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  :

- |                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| 1. "Toutes les boules sont blanches"  | 2. "Les deux premières boules sont blanches"  |
| 3. "Au moins une boule est blanche"   | 4. "Seulement la troisième boule est blanche" |
| 5. "Exactement une boule est blanche" | 6. "Au moins deux boules sont blanches"       |
| 7. "Aucune boule n'est blanche"       | 8. "Exactement deux boules sont blanches".    |

**Exercice 2.** Donner l'expression simplifiée des événements suivants:

- |  |  |
|--|--|
| 1. $(E \cup F) \cap (E \cup \bar{F})$  | 2. $(E \cap F) \cup (\bar{E} \cap F)$                        |
| 3. $(E \cup F) \cap (\bar{E} \cup F) \cap (E \cup \bar{F})$ .                  | 4. $(E \cup F) \cap (F \cup G)$ si $E \subset F \subset G$ . |
| 5. $\bar{E} \cup \bar{F} \cap \bar{F} \cup \bar{G}$ si $E \subset F \subset G$ | 6. $E \cap \bar{E} \cap \bar{F}$ si $E \subset F$ .          |

Soient  $E$  et  $F$  deux événements d'un univers  $\Omega$ . Montrer que

$$E = (E \cap F) \cup (E \cap \bar{F}) \quad \text{et que} \quad E \cup F = (E \cap F) \cup (E \cap \bar{F}) \cup (F \cap \bar{E})$$

et représenter les ensembles à l'aide d'un dessin.

**Exercice 3.** Soit  $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}$  un ensemble de cardinal  $n$  et  $\mathcal{P}(\Omega)$  l'ensemble des parties de  $\Omega$ , qui est composé de l'ensemble vide  $\emptyset$  et de l'ensemble des unions de singletons de  $\Omega$ . On veut montrer que le cardinal de  $\mathcal{P}(\Omega)$  est  $2^n$ . Pour cela on écrit chaque élément de  $\mathcal{P}(\Omega)$  comme union de singletons de  $\Omega$  et on le code en lui faisant correspondre une succession de  $n$  cases où la case  $i$  prend la valeur 1 lorsque le singleton  $\{a_i\}$  est présent dans l'union et la valeur 0 sinon. Par exemple, si  $\Omega = \{a_1, a_2, a_3\}$ , alors l'événement  $A = \{a_1, a_3\} \in \mathcal{P}(\Omega)$  est codé 101 et l'événement  $B = \{a_3, a_2\} \in \mathcal{P}$  est codé 011.

On suppose que  $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}$ .

1. Coder les événements suivants:  $\emptyset$ ,  $\{a_2, a_n\}$ ,  $\{a_3, a_{n-1}, a_n\}$ ,  $\Omega$ .
2. En déduire que le cardinal de  $\mathcal{P}(\Omega)$  est  $2^n$ .

**Exercice 4.** Combien de nombres peut-on former avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, chaque chiffre n'étant présent qu'une fois, de façon que chaque nombre commence par 7 et soit divisible par 5,

1. si les nombres sont de 8 chiffres ?
2. si les nombres sont de 6 chiffres ?

**Exercice 5.** Vous disposez de 5 billes rouges, de 2 blanches et de 3 jaunes que vous voulez aligner sur 10 cases. Les billes de même couleur sont indiscernables.

1. De combien de façons pouvez-vous disposer les 5 billes rouges?
2. De combien de façons pouvez-vous disposer les 2 billes blanches une fois que les rouges sont posées?
3. De combien de façons pouvez-vous disposer les 3 billes jaunes restantes?
4. En déduire le nombre de façons d'aligner toutes les billes. Un exemple d'alignement est:  $rrrrbrbjjj$ , où  $r$  désigne une boule rouge,  $b$  une boule blanche, et  $j$ , une boule jaune.

**Exercice 6.** On tire au hasard (et en même temps, de sorte que l'ordre de tirage ne compte pas) 3 boules d'une urne contenant 4 boules blanches et 2 boules noires. Quelle est la probabilité que l'une des boules tirées soit noire et que les deux autres soient blanches.

**Exercice 7.** On lance un dé pipé pour lequel

- les faces paires ont toutes les mêmes chances d'apparition.
- les faces impaires ont toutes les mêmes chances d'apparition.
- une face paire donnée a deux fois plus de chances d'apparaître qu'une face impaire donnée.

Alors

1. Déterminer la probabilité d'apparition d'une face paire.
2. Déterminer la probabilité d'apparition d'une face impaire.

**Exercice 8.** Soit  $A$  et  $B$  deux événements d'un univers  $\Omega$ .

1. Montrer que  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .
2. En déduire que si  $A \subset B$  alors  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .
3. Montrer que  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .

**Exercice 9.** Soit  $A$  et  $B$  deux événements d'un univers  $\Omega$  tels que  $\mathbb{P}(A) = 0.6$ ,  $\mathbb{P}(B) = 0.4$  et  $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.2$ . Déterminer les probabilités de

$$A \cup B; \quad A^c; \quad B^c; \quad A^c \cup B^c; \quad A^c \cap B; \quad A \cup B^c; \quad A^c \cap B^c.$$

**Exercice 10.** Quelle est, dans une classe de 30 élèves, la probabilité pour que deux élèves au moins aient la même date d'anniversaire?

**Exercice 11.** On jette 3 dés discernables non pipés. Calculer la probabilité

1. d'obtenir au moins un as ;
2. d'obtenir au moins 2 faces portant le même chiffre ;
3. que la somme des points de chaque face soit paire.