

TD 8 : Lois usuelles

Exercice 1.

- 1) Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que X est une variable aléatoire "sans mémoire", c'est à dire qu'elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, P_{\{X > x\}}(X > x + y) = P(X > y).$$

- 2) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^+ . On suppose que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^+$, X vérifie la propriété suivante

$$P_{\{X > x\}}(X > x + y) = P(X > y).$$

- a) Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $g(x) = P(X > x)$. Montrer que

$$\forall(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, g(x + y) = g(x)g(y).$$

- b) En déduire que g est solution d'une équation différentielle linéaire.
c) Montrer que X suit une loi exponentielle de paramètre $-g'(0)$.

Exercice 2.

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$ telle que

$$P(X \leq 240) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(X \geq 250) = \frac{1}{3}.$$

Déterminer les valeurs de m et σ .

Exercice 3.

On a estimé que 1400 usagers cherchent, le vendredi soir, à prendre le TGV Paris-Nantes de 19h30. Les portes du train ouvrent une demi-heure avant le départ. Parmi les usagers, 50 arrivent avant l'ouverture des portes et 70 arrivent trop tard.

On supposera que la loi des temps d'arrivée est gaussienne.

- Utiliser les tables pour obtenir la moyenne et l'écart-type de cette loi.
- Déterminer l'heure à laquelle les portes du train doivent être ouvertes pour qu'il n'y ait pas plus de 20 usagers qui attendent sur le quai?
- Calculer le nombre de voyageurs ayant manqué le train si celui-ci a un retard de 5 minutes?

Exercice 4.

On suppose que le rendement d'un portefeuille (en %) est une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(5, 2)$.

- Calculer la probabilité d'avoir un rendement négatif.
- Déterminer un intervalle I centré sur 5 tel que $P(X \in I) = 0.98$.

Exercice 5.

Une entreprise fabrique des machines. Le nombre de machines fabriquées chaque jour suit une loi normale. Au cours des 700 derniers jours, plus de trente machines ont été fabriquées au cours de 589 jours différents alors que seulement pendant 16 jours, plus de 90 machines ont été fabriquées.

- Quelle est la fabrication moyenne par jour de machines et quel est l'écart-type?
- Déterminer un intervalle de confiance de niveau 0.99 pour le nombre de machines fabriquées quotidiennement.

Exercice 6.

Un fabricant décide de sélectionner 10% de sa production pour en faire des articles de qualité. Sa production suit une loi normale de moyenne 80 et d'écart-type 4. Quelle est la valeur du seuil à partir duquel un élément de la production est sélectionné pour être transformé en produit de qualité?

Table de la loi normale centrée réduite

La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

La table indique la valeur de $F(x)$ pour $x \geq 0$. Pour $x < 0$, $F(x) = 1 - F(-x)$.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9 ³ 03	0.9 ³ 06	0.9 ³ 10	0.9 ³ 13	0.9 ³ 16	0.9 ³ 18	0.9 ³ 21	0.9 ³ 24	0.9 ³ 26	0.9 ³ 29
3.2	0.9 ³ 31	0.9 ³ 34	0.9 ³ 36	0.9 ³ 38	0.9 ³ 40	0.9 ³ 42	0.9 ³ 44	0.9 ³ 46	0.9 ³ 48	0.9 ³ 50
3.3	0.9 ³ 52	0.9 ³ 53	0.9 ³ 55	0.9 ³ 57	0.9 ³ 58	0.9 ³ 60	0.9 ³ 61	0.9 ³ 62	0.9 ³ 64	0.9 ³ 65
3.4	0.9 ³ 66	0.9 ³ 68	0.9 ³ 69	0.9 ³ 70	0.9 ³ 71	0.9 ³ 72	0.9 ³ 73	0.9 ³ 74	0.9 ³ 75	0.9 ³ 76
3.5	0.9 ³ 77	0.9 ³ 78	0.9 ³ 78	0.9 ³ 79	0.9 ³ 80	0.9 ³ 81	0.9 ³ 81	0.9 ³ 82	0.9 ³ 83	0.9 ³ 83
3.6	0.9 ³ 84	0.9 ³ 85	0.9 ³ 85	0.9 ³ 86	0.9 ³ 86	0.9 ³ 87	0.9 ³ 87	0.9 ³ 88	0.9 ³ 88	0.9 ³ 89
3.7	0.9 ³ 89	0.9 ³ 90	0.9 ⁴ 00	0.9 ⁴ 04	0.9 ⁴ 08	0.9 ⁴ 12	0.9 ⁴ 15	0.9 ⁴ 18	0.9 ⁴ 22	0.9 ⁴ 25
3.8	0.9 ⁴ 28	0.9 ⁴ 31	0.9 ⁴ 33	0.9 ⁴ 36	0.9 ⁴ 38	0.9 ⁴ 41	0.9 ⁴ 43	0.9 ⁴ 46	0.9 ⁴ 48	0.9 ⁴ 50
3.9	0.9 ⁴ 52	0.9 ⁴ 54	0.9 ⁴ 56	0.9 ⁴ 58	0.9 ⁴ 59	0.9 ⁴ 61	0.9 ⁴ 63	0.9 ⁴ 64	0.9 ⁴ 66	0.9 ⁴ 67

La table retourne la valeur de $F(x)$ pour la valeur x lue comme la somme des valeurs figurant en tête de la ligne et de la colonne correspondante.

Exemple : Si $x = 0.64 = 0.6 + 0.04$, $F(x) = 0.7389$.

La notation 0.9³89, par exemple, équivaut à 0.99989.